2º Jogo Concurso Online de Matemática PUC-Campinas

Gabarito - Primeira Fase

1. (*Alternativa* d)

$$\begin{aligned}\text{total de habitantes} &= 14\cdot 10^6\\ \text{habitantes que contrairam malária} &= \frac{0,15}{100}\cdot(14\cdot 10^6)\end{aligned}$$

Então,

$$\underbrace{\text{total de habitantes} - \text{habitantes que contrairam malária}}_{14\cdot 10^6 - \frac{0,15}{100}\cdot 14\cdot 10^6} =$$

$$\begin{aligned}&= 14\cdot 10^6 - 0,0015\cdot 10^6\\ &= 14\cdot 10^6(1-0,0015) \quad \text{(usando fatoração)}\\ &= 14\cdot 10^6\cdot(0,9985)\\ &= 14\cdot 0,9985\cdot 10^6\\ &= 13.979.000\end{aligned}$$

2. (*Alternativa* b)

Sol. Note que se a afirmação "*A é divisível por* 55" fosse verdadeira, isto implicaria em:

$$\begin{aligned}A &= 55\cdot n\\ &= 5\cdot 11\cdot n\end{aligned}$$

Ou seja, A seria divisível por 5 e A seria divisível por 11 e portanto teríamos três afirmações verdadeiras e uma falsa.

Vamos fazer outra consideração então. Supondo que a afirmação $A < 10$ é verdadeira, isto implica que A não pode ser divisível por 11 e A não pode ser divisível por 55. Portanto podemos considerar que:

$$\begin{array}{rrl}
A & \text{seria divisível por} \quad 5 & \text{(verdadeira)} \\
A & \text{seria divisível por} \quad 11 & \text{(falsa)} \\
A & \text{seria divisível por} \quad 55 & \text{(verdadeira)} \\
 & A < 10 & \text{(falsa)}
\end{array}$$

Portanto $A = 5$ é a escolha possível que resolve o problema.

3. *Resp:* 240

   Vamos definir as seguintes variáveis:

$$\begin{array}{rcl}
x & = & \text{número de peças para fabricar um castelo} \\
y & = & \text{número de peças para fabricar uma casa} \\
z & = & \text{número de peças para fabricar uma ponte}
\end{array}$$

A partir das informações contempladas no enunciado, montamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{array}{rcll}
x + y & = & 120 & (I) \\
y + z & = & 160 & (II) \\
z + x & = & 200 & (III)
\end{array}$$

Multiplicando a Equação I por (-1) e somando com a Equação II, obtemos uma outra equação IV:

$$\begin{array}{l}
+\left\{\begin{array}{rcll}
-x - \cancel{y} & = & -120 & \text{(I)} \\
\cancel{y} + z & = & 160 & \text{(II)}
\end{array}\right. \\
\hline
\quad -x + z \;=\; 40 \qquad \text{(IV)}
\end{array}$$

Agora, resolvemos primeiramente o sistema de equações formado pelas equações III e IV, pelo método da adição:

$$+\begin{cases} z + \cancel{x} = 200 & \text{(III)} \\ -\cancel{x} + z = 40 & \text{(IV)} \end{cases}$$
$$\overline{2z = 240}$$

$$\Rightarrow z = \frac{240}{2} \Rightarrow z = 120$$

Voltando $z = 120$ em III, nós temos que:

$$\begin{aligned} 120 + x &= 200 \\ \underbrace{-120 + 120}_{0} + x &= \underbrace{-120 + 200}_{80} \quad \text{(somando -120 a ambos os membros)} \\ \Rightarrow x &= 80 \end{aligned}$$

Voltando $x = 80$ em I, temos que:

$$\begin{aligned} 80 + y &= 120 \\ \underbrace{-80 + 80}_{0} + y &= -80 + 120 \\ \Rightarrow y &= 40 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} x + y + z &= 80 + 40 + 120 \\ &= 240 \end{aligned}$$

Logo, para construir a casa, o castelo e a ponte serão necessárias 240 peças no total.

4. (*Alternativa c*)

   So. Seja $n =$ número de ingressos de $\$3,00$. Então,

$$\begin{aligned} 3 \cdot n + 5 \cdot (3n) + (3n + 10) \cdot 7.50 &= 885 \\ \Rightarrow 3n + 15n + 7.50 \cdot (3n + 10) &= 885 \\ 3n + 15n + 7,50 \cdot 3n + 7.50 \cdot 10 &= 885 \\ 18n + 22.5n &= 885 - 75 \\ 40.5n &= 810 \\ n &= \frac{810}{40.5} \\ n &= 20 \end{aligned}$$

Logo, foram vendidos:

$$\begin{array}{lll} 20 & \text{ingressos de} & \$3.00 \\ 60 & \text{ingressos de} & \$5.00 \\ 70 & \text{ingressos de} & \$7.50 \end{array}$$

5. (*Alternativa* c)

   Definimos as seguintes variáveis:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \text{unidades do kit X} \\ y & = & \text{unidades do kit Y} \end{array}$$

   A partir das nossas variáveis, da tabela dada e da demanda de três chips e seis placas em um notebook, nós podemos representar o problema através da seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   Ou seja,

$$\begin{array}{rcl} 2x + 1y & = & 3 \\ 3x + 2y & = & 6 \end{array}$$

   Note que uma possibilidade óbvia seria quando $x = 0$ e $y = 3$. Com efeito,

$$\begin{array}{rcl} 2x \cdot 0 + 1 \cdot 3 & = & 3 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & = & 6 \end{array}$$

6. Resp: 44

   Sol. Temos um total de 12 fileiras horizontais de tijolos. Note que na 1^{a} fileira existem $\left(8 + \dfrac{1}{2}\right)$ tijolos. Como o muro é retangular, devemos ter a mesma quantidade de tijolos nas demais fileiras.

   Como a 2^{a} fileira tem $4 + \dfrac{1}{2}$ tijolos $\Rightarrow$ faltam $\left(8 + \dfrac{1}{2}\right) - \left(4 + \dfrac{1}{2}\right) = 4$ tijolos

   Como a 3^{a} fileira tem $4 + \dfrac{1}{2}$ tijolos $\Rightarrow$ faltam $\left(8 + \dfrac{1}{2}\right) - \left(4 + \dfrac{1}{2}\right) = 4$ tijolos

Como a 4^{a} fileira tem $4+\dfrac{1}{2}$ tijolos $\Rightarrow$ faltam $\left(8+\dfrac{1}{2}\right)-\left(4+\dfrac{1}{2}\right)=4$ tijolos

Como a 5^{a} fileira tem $4+\dfrac{1}{2}$ tijolos $\Rightarrow$ faltam $\left(8+\dfrac{1}{2}\right)-\left(4+\dfrac{1}{2}\right)=4$ tijolos

Como a 6^{a} fileira tem $3+\dfrac{1}{2}$ tijolos $\Rightarrow$ faltam $\left(8+\dfrac{1}{2}\right)-\left(3+\dfrac{1}{2}\right)=5$ tijolos

Como a 7^{a} fileira tem $3+\dfrac{1}{2}$ tijolos $\Rightarrow$ faltam $\left(8+\dfrac{1}{2}\right)-\left(3+\dfrac{1}{2}\right)=5$ tijolos

Como a 8^{a} fileira tem $2+\dfrac{1}{2}$ tijolos $\Rightarrow$ faltam $\left(8+\dfrac{1}{2}\right)-\left(2+\dfrac{1}{2}\right)=6$ tijolos

Como a 9^{a} fileira tem $4+\dfrac{1}{2}$ tijolos $\Rightarrow$ faltam $\left(8+\dfrac{1}{2}\right)-\left(4+\dfrac{1}{2}\right)=4$ tijolos

Como a 10^{a} fileira tem $4+\dfrac{1}{2}$ tijolos $\Rightarrow$ faltam $\left(8+\dfrac{1}{2}\right)-\left(4+\dfrac{1}{2}\right)=4$ tijolos

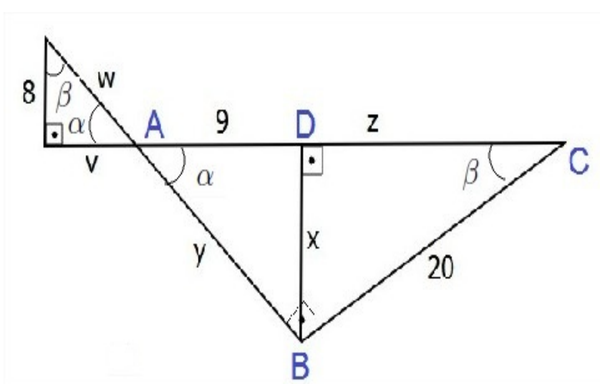
Como a 11^{a} fileira tem $4+\dfrac{1}{2}$ tijolos $\Rightarrow$ faltam $\left(8+\dfrac{1}{2}\right)-\left(4+\dfrac{1}{2}\right)=4$ tijolos

Ou seja, temos que o total de tijolos faltantes no muro é igual a:

$$7\times 4 \text{ tijolos} + 2\times 5 \text{ tijolos} + 1\times 6 \text{ tijolos} = 44 \text{ tijolos}$$

7. *Sol.*

Dado o triângulo abaixo, vamos aplicar semelhança de triângulos.



Como o triângulo ΔADB é semelhante ao triângulo DC, temos que:

$$\frac{x}{9}=\frac{20}{y}$$

Isto implica que $x \cdot y = 180 \Rightarrow y = \dfrac{180}{x} \quad (I)$

Aplicando o Teorema de Pitâgoras ao triângulo ΔADB, temos que:

$$y^2 = x^2 + 9^2 \quad (II)$$

Voltando I em II, nós temos que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{180}{x}\right)^2 &= x^2 + 9^2 \\
\frac{32400}{x^2} &= x^2 + 81 \\
\frac{32400}{x^2} &= x^2 + 81 \qquad \times\, x^2 \\
\frac{32400}{x^2} \cdot x^2 &= x^2 \cdot x^2 + 81 \cdot x^2 \\
32400 &= x^4 + 81x^2 \Rightarrow x^4 + 81x^2 - 32400 = 0
\end{aligned}$$

Fazendo $r = x^2$, temos que:

$$\begin{aligned}
r^2 &+ 81r - 32400 = 0 \\
\Rightarrow \Delta &= (81)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32400) \\
\Delta &= 6561 + 129600 \\
\Delta &= 136161
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow r = \frac{-81 \pm \sqrt{136161}}{2 \cdot 1}$$

Temos duas soluções para r:

$$r = -225 \quad \text{ou} \quad r = 144$$

Como $r = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{r}$. Isto implica que a solução que devemos considerar deve ser positiva, ou seja, $r = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$

Voltando $x = 12$ em I, nós temos que:

$$y = \frac{180}{12} \Rightarrow y = 15$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ΔBDC, nós temos que:

$$\begin{aligned} 20^2 &= 12^2 + z^2 \\ 20^2 - 12^2 &= z^2 \\ 400 - 144 &= z^2 \\ 256 &= z^2 \Rightarrow z = 16 \end{aligned}$$

Para determinar o valor das medidas w e v, vamos aplicar semelhança de triângulos. Note que o menor triângulo é semelhante ao triãngulo ΔADB. Então,

$$\begin{aligned} \frac{w}{15} &= \frac{v}{9} \\ \left(\frac{w}{15}\right)^{2} &= \left(\frac{v}{9}\right)^{2} \quad \text{(elevando-se ambos os membros ao quadrado)} \\ \frac{w^2}{225} &= \frac{v^2}{81} \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{w^2 \cdot 81}{225} \quad (III) \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo menor, nós temos que:

$$w^2 = 8^2 + v^2 \quad (IV)$$

Substituindo III em IV, nós temos que:

$$\begin{aligned} w^2 &= 8^2 + \left(\frac{w^2 \cdot 81}{225}\right) \\ &= 8^2 + \left(\frac{w^2 \cdot 81}{225}\right) \quad \times 225 \\ 225 \cdot w^2 &= 8^2 \cdot 225 + \left(\frac{w^2 \cdot 81}{225}\right) \cdot 225 \\ 225w^2 &= 14400 + w^2 81 \\ 225w^2 - 81^2 &= 14400 \\ 144w^2 &= 14400 \\ w^2 &= \frac{14400}{144} \\ w^2 &= 100 \Rightarrow w = 10 \end{aligned}$$

Voltando $w = 10$ em III, nós temos que:

$$v^2 = \frac{10^2 \cdot 81}{225} \Rightarrow v = 6$$

Comparando os valores obtidos, temos que $z = 16$ é o maior valor dentre as medidas.

8. *Resp:* 100

$$\begin{aligned}
\frac{(x+1)^{100} \cdot (x-1)^{49}}{(1-x)^{50} \cdot (-x-1)^{99}} &= \frac{(x+1)^{100} \cdot ((-1)(-x+1))^{49}}{(1-x)^{50} \cdot ((-1)(x+1))^{99}} && \text{(colocando (-1) em evidência)} \\
&= \frac{(x+1)^{100} \cdot (-1)^{49} \cdot (1-x)^{49}}{(1-x)^{50} \cdot (-1)^{99} \cdot (x+1)^{99}} && \text{(propriedade de potenciação do produto)} \\
&= \frac{(x+1)^{100} \cdot (1-x)^{49} \cdot (-1)^{49}}{(1-x)^{50} \cdot (x+1)^{99} \cdot (-1)^{99}} && \text{(reorganizando o produto)} \\
&= \frac{(x+1)^{100}}{(1+x)^{99}} \cdot \frac{(1-x)^{49}}{(1-x)^{50}} \cdot \frac{(-1)^{49}}{(-1)^{99}} \\
&= (x+1)^{100-99} \cdot (1-x)^{49-50} \cdot 1 \\
&= (x+1) \cdot (1-x)^{-1} \cdot 1 \quad (I)
\end{aligned}$$

Substituindo $x = \dfrac{101}{99}$ em I, nós temos que:

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{101}{99} + 1\right) \cdot \left(1 - \frac{101}{99}\right)^{-1} \cdot 1 \\
&= \frac{101+99}{99} \cdot \left(\frac{99-101}{99}\right)^{-1} \cdot 1 \\
&= \frac{200}{99} \cdot \left(\frac{-2}{99}\right)^{-1} \\
&= \frac{200}{99} \cdot \frac{99}{-2} \\
&= \frac{200}{-2} \\
&= -100
\end{aligned}$$

Então a expressão, em módulo, quando $x = \dfrac{101}{99}$ é igual a 100.

9. (*Alternativa b*)

   Sol.

   Como $x = 5$ é uma solução, então o número 5 satisfaz a equação $\dfrac{5 \cdot x \bullet 4}{3} = \dfrac{x+2}{1}$. Desta forma, vamos substituir $x = 5$ na equação:

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot 5 \bullet 4}{3} &= \frac{5+2}{1} \\ \frac{25 \bullet 4}{3} &= \frac{7}{1} \end{aligned}$$

   Multiplicando a equação acima por 3, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{25 \bullet 4}{3} \times 3 &= \frac{7}{1} \times 3 \\ \Rightarrow 25 \bullet 4 &= 21 \end{aligned}$$

   Ou seja, a operação $\bullet$ que torna a equação acima verdadeira é a operação de *subtração*.

10. *Resp:* 13

    Sol. O maior espaço possível de modo a atender a exigência do plantio de árvores igualmente espaçadas é calculado a partir do *máximo divisor comum* entre 221 e 117. Aplicando o dispositivo prático para obtenção do $mdc(221, 117)$, temos que:

	1	1	8
221	117	104	13
104	13	0	

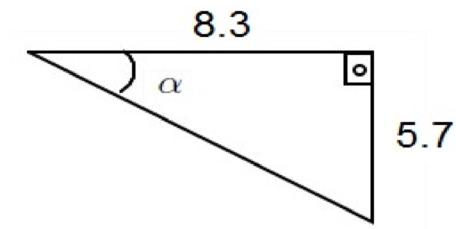
    Ou seja, $mdc(221, 117) = 13$ e portanto o maior espaçamento entre as árvores igualmente espaçadas é igual a 13 metros.

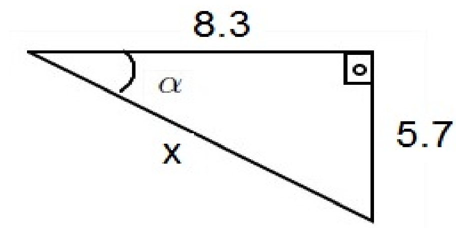
11. *Alternativa b*

    Sol.

    Aplicando a razão trigonométrica *tangente* ao triângulo acima, temos que:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha) &= \frac{5.7}{8.3} \\ &= 0.6867 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}(0.6867) \Rightarrow \alpha = 34.47^\circ \end{aligned}$$





Seja x o comprimento percorrido pelos feixes de raios gamma. Então vamos aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo.

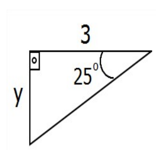
Ou seja,

$$\begin{aligned} x^2 &= (8.3)^2 + (5.7)^2 \\ &= \sqrt{(8.3)^2 + (5.7)^2} \\ &\approx 10.06 \text{ cm} \end{aligned}$$

12. *Alternativa d*

Sol.

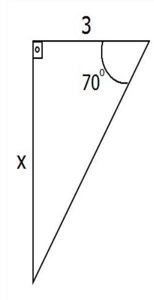
(I) De fato, podemos considerar o seguinte triângulo de referência:



Para determinar a medida y, nós calculamos a tangente de $25°$, ou seja,

$$\text{tg}(25°) = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 3 \cdot \text{tg}(25)° \approx 1.3989$$

(II) De fato, podemos considerar o seguinte triângulo de referência:



Para determinar a medida X, nós calculamos a tangente de $25°$, ou seja,

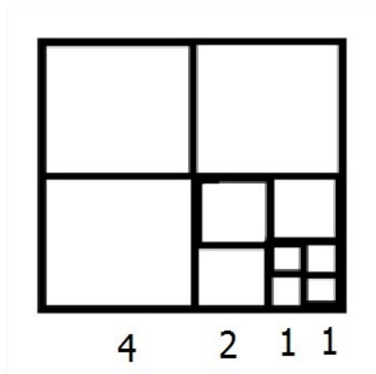
$$\mathrm{tg}(70°) = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3 \cdot \mathrm{tg}(70)° \approx 8.2424$$

O tamanho da janela é essencialmente dado por: $x - y = 6.85$ pés.

13. *Alternativa d*

    Sol.

    Como o quadrado menor mede $1\ cm$, temos as seguintes medidas para os lados dos outros quadrados:

    Desta forma, o lado do quadrado maior mede:

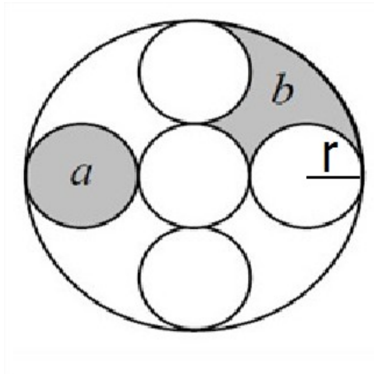
$$\begin{aligned} l &= 4+2+1+1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

    Como a área de um quadrado é dada por: $A = l^2$, nós temos que:

$$\begin{aligned} A &= 8^2 \\ &= (2^3)^2 \\ &= 2^{3\cdot 2} \quad \text{(propriedade de potenciação)} \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

14. *Resp:* 1

Seja r o raio das circunferências menores, conforme exibe o desenho abaixo:



Então, a área da região a, representada por uma circunferência pequena é dada por: $a = \pi r^2$.
A área b é numericamente igual a

$$b = \frac{A_G - 5a}{4},$$

onde A_G é a área da circunferência maior. Então, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \frac{A_G - 5a}{4} \\ &= \frac{\pi(3r)^2 - 5\pi r^2}{4} \\ &= \frac{\pi 9 \cdot r^2 - 5\pi r^2}{4} \\ &= \frac{4\pi r^2}{4} \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

Então a razão $\frac{a}{b}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{\pi r^2}{\pi r^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

15. *Resp:* 21084

Sol.

Seja a_n o número de eixos na n-ésima fileira. Desta forma,

$$a_n = 500 + (n-1) \cdot (-6)$$

Seja N a última fileira, então:

$$
\begin{aligned}
2 &= 500 + (N-1)(-6) \\
2 &= 500 - 6N + 6 \\
2 &= 506 - 6N \\
6N &= 506 - 2 \\
6N &= 504 \\
N &= \frac{504}{6} \\
&= 84 \Rightarrow \text{existem 84 fileiras no total}
\end{aligned}
$$

A soma dos eixos ao longo de todas as fileiras respeita a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, ou seja:

$$
\begin{aligned}
S_{84} &= \frac{(a_1 + a_{84}}{)} \cdot 842 \\
&= \frac{(500+2) \cdot 84}{2} \\
&= 21084 \quad \text{eixos}
\end{aligned}
$$

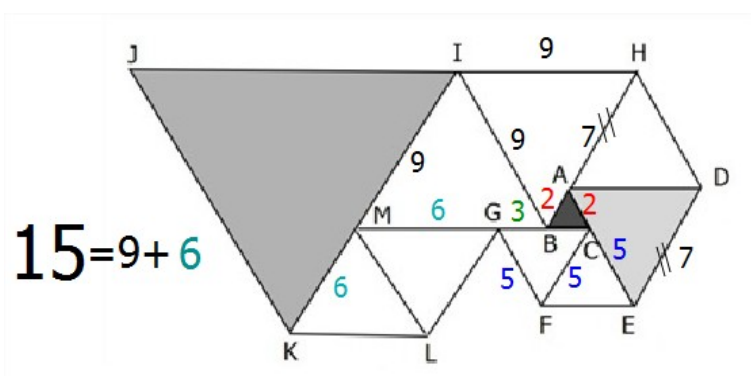
16. *Resp:* 64

    Sol. Em 1^{o} de Agosto de 2009, cada um dos quatro insetos já serão adultos e, portanto, cada um deles dará luz a quatro outros insetos, ou seja nascerão 4×4 insetos.

    Em 1^{o} de Agosto de 2009, cada um dos 16 insetos serão adultos e cada um dará luz a outros 4 insetos, ou seja, nascerão 16×4 insetos. Logo, 64 insetos irão nascer em Agosto de 2010.

17. *Alternativa c*

18. *Resp:* $15\ cm$.



19. *Resp:* 25 lavagens.

    Sol.

    Seja x a porcentagem da cor de uma roupa antes de iniciar as lavagens. Então, após a primeira lavagem, perde-se 9% de x. Desta forma, o percentual da cor que permanece é dado por:

$$\begin{aligned} x - 0.09x &= x(1-0.09) \\ &= x \cdot 0.91 \end{aligned}$$

    Após a segunda lavagem, perde-se 9% de $(x \cdot 0.91)$. Desta forma, o percentual da cor que permanece é dado por:

$$\begin{aligned} (x \cdot 0.91) - 0.09(x \cdot 0.91) &= (1-0.09)(x \cdot 0.91) \\ &= 0.91 \cdot x \cdot 0.91 \\ &= (0.91)^2 \cdot x \end{aligned}$$

    Então, após n lavagens, o percentual da cor que permanece na roupa é dado por: $x \cdot (0.91)^n$. Se permanece 10% da cor original, então:

$$\begin{aligned} 0.10x &= x \cdot (0.91)^n \\ \Rightarrow 0.10 &= (0.91)^n \end{aligned}$$

    Aplicando logaritmo a ambos os membros da equação acima, temos que:

$$\begin{aligned} \text{Log}(0.10) &= \text{Log}(0.91^n) \\ \text{Log}(0.10) &= n \cdot \text{Log}(0.91) \\ \frac{\text{Log}(0.10)}{\text{Log}(0.91)} &= n \Rightarrow n = 24.14 \end{aligned}$$

    Isto implica que seriam necessárias 25 lavagens para permanecer 10% da cor original.

20. *Resp:* Seja $n = aaa$. Representando n na base 10 temos que:

$$\begin{aligned} n &= 10^2 a + 10a + a \\ &= a(10^2 + 10 + 1) \quad \text{(fatorando)} \\ &= a(111) \\ &= a(3 \cdot 37) \\ &= a \cdot 3 \cdot 37 \Rightarrow n \text{ é divisível por 37} \end{aligned}$$

21. *Resp:* 15

Ao utilizar a informação de que $\frac{2}{5}$ dos baianos são homens, o aluno precisa recorrer a uma propriedade elementar de números naturais, ou seja, como a quantidade de baianos que são homens deve ser um número inteiro, isto significa que o número de baianos precisa necessariamente ser um número múltiplo de 5. Similarmente, ao usar a informação de que $\frac{3}{7}$ dos mineiros são mulheres, o aluno deve concluir que o número de mineiros deve ser múltiplo de 7.

Como o número total de funcionários é igual a 31, vamos montar uma tabela com duas colunas, em que a primeira coluna representa o número de baianos (divisível por 5) e a segunda coluna representa o número de mineiros (divisível por 7).

Baianos	Mineiros
5	7
10	14
15	21
20	28
25	
30	

Como o número 31 é um número ímpar, isto implica que ele somente pode ser escrito como a soma de um número par com um número ímpar. Então a partir da nossa tabela a possibilidade que cumpre com esta exigência é:

$$31 = 10 + 21$$

Se $\frac{2}{5}$ dos homens são baianos $\Rightarrow$ $\frac{3}{5}$ dos baianos são mulheres. Então,

$$\begin{aligned} \text{número de mulheres} &= \frac{3}{5} \cdot 10 + \frac{3}{7} \cdot 21 \\ &= \frac{30}{5} + \frac{63}{7} \\ &= 6 + 9 \\ &= 15 \end{aligned}$$

22. *Resp:* 517

$$\begin{aligned} 9xy - x^2 - 8y^2 &= 2005 \\ 8xy + xy - x^2 - 8y^2 &= 2005 \\ -x^2 + xy + 8xy - 8y^2 &= 2005 \quad \text{(reorganizando a soma)} \\ -x(x-y) + 8y(x-y) &= 2005 \quad \text{(fatorando)} \\ (x-y)(-x+8y) &= 2005 \quad \text{(fatorando novamente)} \end{aligned}$$

Decompondo 2005 em produto de fatores primos, nós temos que $2005 = 401 \cdot 5$. Então,

$$(x-y)(-x+8y) = 401 \cdot 5$$

Vamos analisar possibilidades: Se

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ 8y - x &= 401 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = 58$ e $x = 63$.

Se

$$\begin{aligned} x - y &= 401 \\ 8y - x &= 5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = 58$ e $x = 459$.

Como queremos o maior valor possível para a soma $x + y$, então devemos considerar x e y positivos. Neste caso teremos que $58 + 459 = 517$ é o maior valor possível.

23. *Alternativa d*

De acordo com a figura, temos que o comprimento da circunferência é igual a x, ou seja,

$$\begin{aligned} 2\pi r &= x \\ \Rightarrow r &= \frac{x}{2\pi} \quad (I) \end{aligned}$$

Com repeito ao quadrado, temos que o seu perímetro é igual a $24-x$, logo o lado do quadrado é igual a $l = \dfrac{24-x}{4}$.

Definimos a função área como sendo a área do círculo mais a área do quadrado, ou seja,

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{círc}} + A_{\text{quad}} \\ &= \pi r^2 + l^2 \\ &= \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{24-x}{4}\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{24^2 - 2\cdot 24 \cdot x + x^2}{16}\right) \\ &= \left(\frac{4+\pi}{16\pi}\right) x^2 - 3x + 36 \end{aligned}$$

Note que trata-se de uma função de segundo grau, com coeficiente a positivo, ou seja, o gráfico da função tem concavidade para cima. Desta forma, a função $A(x)$ atingirá um mínimo no vértice da parábola. Então,

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} \\ &= \frac{3}{\left(\dfrac{4+\pi}{16\pi}\right)} \\ &\approx 10.55 \quad \text{metros} \end{aligned}$$

Desta forma o comprimento do menor pedaço de corda que determina a menor área é igual a 10.55 metros.

24. Alternativa a

Primeiramente precisamos determinar a constante C do modelo. Podemos usar o ponto $(x, f(x)) = (2, 20)$ do gráfico dado. Substituinto o ponto $(x, f(x)) = (2, 20)$ no modelo $f(x) = \dfrac{50}{1 + C \cdot 2^{-3x}}$, temos que:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{50}{1 + C \cdot 2^{-3 \cdot 2}} \\ 20 &= \frac{50}{1 + C \cdot 2^{-6}} \\ 1 + C2^{-6} &= \frac{50}{20} \\ C \cdot 2^{-6} &= \frac{5}{2} - 1 \\ 2^{-6}C &= \frac{3}{2} \\ C &= \frac{3}{2 \cdot 2^{-6}} \Rightarrow C = 96 \end{aligned}$$

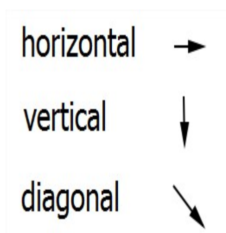
Então o modelo é dado por $f(x) = \dfrac{50}{1 + 96 \cdot 2^{-3x}}$.

Se 28% das maçãs são contaminadas, vamos determinar o x correspondentes substituindo o ponto $(x, 28)$ no modelo, ou seja,

$$
\begin{aligned}
28 &= \frac{50}{1+96\cdot 2^{-3x}} \\
1+96\cdot 2^{-3x} &= \frac{50}{28} \\
96\cdot 2^{-3x} &= \frac{50}{28}-1 \\
96\cdot 2^{-3x} &= \frac{22}{28} \\
2^{-3x} &= \frac{22}{96\cdot 28} \\
\mathrm{Log}(2^{-3x}) &= \mathrm{Log}\left(\frac{22}{96\cdot 28}\right) \quad \text{(aplicando logaritmo a ambos os membros)} \\
-3x\mathrm{Log}(2) &= \mathrm{Log}\left(\frac{22}{96\cdot 28}\right) \quad \text{(usando propr. de logaritmos)} \\
x &= -\frac{\mathrm{Log}\left(\frac{22}{96\cdot 28}\right)}{3\cdot \mathrm{Log}(2)} \\
x &= 2.31 = 2+0.31\text{meses} \approx 2\text{meses}+10 \quad \text{dias}
\end{aligned}
$$

25. *Resp:* 63

Denotemos os movimentos permitidos por:



Analisemos casos:

(i) diagonal $=0$, horizontal $=3$, vertical $=3$

$$\text{número de percursos possíveis} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

(ii) diagonal $=1$, horizontal $=2$, vertical $=1$

$$\text{número de percursos possíveis} = \frac{5!}{2!2!1!} = 30$$

(iii) diagonal $= 2$, horizontal $= 1$, vertical $= 2$

$$\text{número de percursos possíveis} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$$

(iv) diagonal $= 3$

$$\text{número de percursos possíveis} = 1$$

Temos que o número total de percursos é igual a:$20 + 30 + 12 + 1 = 63$