Questão 01 (FÁCIL)

Resposta correta: 2,5.

Resolução: Considerando os dados do exercício tem-se que:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow a + c = 1 \Leftrightarrow a = 1 - c \text{ (I)}$$

Sabe-se que (a, b, c) formam uma PA de razão -1 $\Leftrightarrow b = a - 1$ e $c = a - 2$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos: $a = 1 - a + 2 \Leftrightarrow 2a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

Consequentemente, temos: $b = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ e $c = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

Portanto a função é dada por $f(x) = \frac{3}{2}\, 2^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$ e $f(2) = \frac{3}{2}\, 2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Questão 02 (FÁCIL)

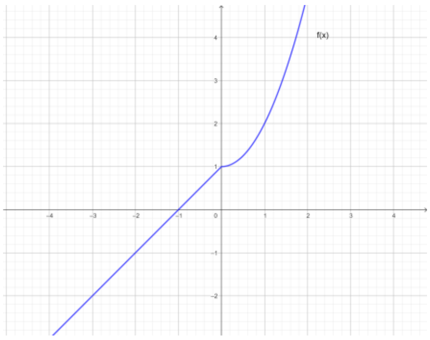
Resolução: a) VFF

I - V Devemos mostrar que para qualquer $y \in \mathbb{R}, existe\ \ x \in \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x) = y$.

De fato,

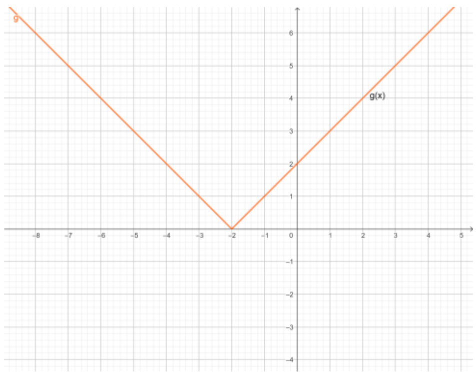
• se $y \leq 1 \rightarrow\ \ y = x + 1 \rightarrow x = y - 1$
• se $y > 1 \rightarrow y = x^2 + 1 \rightarrow x = \sqrt{y - 1}$ (consideramos só a raiz positiva pois $x > 0$).

Ou, a partir da construção do gráfico (abaixo), podemos verificar que qualquer reta horizontal intercepta o gráfico da função.



II-F Devemos verificar se $x_1 \neq x_2 \rightarrow\ \ g(x_1) \neq g(x_2)$.

Tomando, por exemplo $x_1 = 0$ e $x_2 = -4$ temos que $x_1 \neq x_2$ mas $g(x_1) = g(x_2) = 2$.
Ou, a partir da construção do gráfico (abaixo), podemos verificar que qualquer reta horizontal para $y > 0$ intercepta o gráfico da função em 2 pontos distintos.



III-F

$$(fog)(0) = f\big(g(0)\big) = f(2) = 5$$
$$(gof)(0) = g\big(f(0)\big) = g(1) = 3$$

Questão 03 (FÁCIL)

Resposta correta: 12

Resolução: As 5 miçangas de cores distintas serão dispostas de forma circular para montagem do anel e esta montagem envolverá uma permutação circular. Neste caso, a coloração pode ser feita de $(5-1)! = 4!$ maneiras distintas. Portanto, a montagem pode ser feita de

$$\frac{4!}{2} = 12$$

maneiras distintas. A divisão por 2 exclui as repetições quando viramos o anel.

Questão 04 (MÉDIO)

Resposta correta: 165

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ 3 & 9 & k \end{bmatrix}$$

A soma dos elementos que estão fora da diagonal (ou seja $\sum a_{ij}$ para $i \neq j$) é igual a

$$1 + 2 + 2 + 1 + 3 + 9 = 18.$$

Portanto $3k = \frac{18}{3} = 6 \Rightarrow k = 2$ e a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 12 & 22 & 9 \\ 11 & 15 & 8 \\ 30 & 39 & 19 \end{bmatrix}.$$

e a soma dos elementos de A^2 é igual a **165.**

Questão 05 (MÉDIO)

Resposta correta: 1

Sejam α e β dois ângulos positivos, distintos e suplementares. Então: $\alpha + \beta = 180°$. Assim, $\alpha = 180° - \beta$.

I) **Verdadeira.** De fato, se β não é obtuso, então $\beta \leq 90°$. Como α e β são dois ângulos distintos, teremos que $\beta < 90°$. E assim, $\alpha = 180° - \beta \rightarrow \alpha > 90° \rightarrow \alpha$ é obtuso.

II) **Falsa.** De fato, como os ângulos são suplementares, temos que as tangentes de α e β terão sinais distintos e, portanto, o sinal do produto das tangentes de α e β será um número negativo.

III) **Verdadeira.** De fato, $sen(\alpha) \cdot sen(\beta) = sen(180° - \beta) \cdot sen(\beta) =$

$$= (sen(180°) \cdot \cos(\beta) - sen(\beta) \cdot \cos(180°)) \cdot sen(\beta) = sen^2(\beta) > 0.$$

IV) **Verdadeira.** De fato,

$$(sen\alpha)^2 + (cos\beta)^2 = \left(sen(180° - \beta)\right)^2 + (cos\beta)^2 =$$

$$= (sen(180°) \cdot \cos(\beta) - sen(\beta) \cdot \cos(180°))^2 + (\cos(\beta))^2 = (sen(\beta))^2 + \left(cos(\beta)\right)^2 = 1$$

V) **Falsa.** De fato, $cossec\ \alpha = \frac{1}{sen(\alpha)} = \frac{1}{sen(180° - \beta)} = \frac{1}{sen(180°) \cdot \cos(\beta) - sen(\beta) \cdot \cos(180°)} = \frac{1}{sen(\beta)} = cossec(\beta)$

Assim, NV = 3 e NF = 2 e, portanto, NV-NF=1.

Questão 06 (MÉDIO)

Resposta correta: 151200

Resolução: Primeiramente, vamos selecionar quais serão os 8 eventos escolhidos, dentre os 10 eventos disponíveis. Esta escolha pode ser feita de $\binom{10}{8}$ maneiras diferentes. Os 8 eventos escolhidos serão distribuídos entre os 6 profissionais, respeitando-se as condições do problema:

- o profissional P1 fica com 2 eventos. Logo, escolhemos 2 eventos para P1. A escolha pode ser feita de $\binom{8}{2}$ maneiras diferentes.
- o profissional P2 fica com 1 evento. Logo, dos 6 eventos restantes, escolhemos 1 evento para P2. A escolha pode ser feita de $\binom{6}{1}$ maneiras diferentes.
- o profissional P3 fica com 0 evento. Logo, dos 5 eventos restantes, não escolhemos eventos para P3. A escolha pode ser feita de $\binom{5}{0}$ maneiras diferentes.
- o profissional P4 fica com 1 evento. Logo, dos 5 eventos restantes, escolhemos 1 evento para P4. A escolha pode ser feita de $\binom{5}{1}$ maneiras diferentes.
- o profissional P5 fica com 1 evento. Logo, dos 4 eventos restantes, escolhemos 1 evento para P5. A escolha pode ser feita de $\binom{4}{3}$ maneiras diferentes.
- o profissional P6 fica com 1 evento. Logo, do único evento restante, escolhemos 1 evento para P6. A escolha pode ser feita de $\binom{1}{1}$ maneiras diferentes.

Aplicando o Principio Multiplicativo obtemos

$$\binom{10}{8}\binom{8}{2}\binom{6}{1}\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{4}{3}\binom{1}{1} = 151200.$$

maneiras de alocar os 8 eventos entre os profissionais.

Questão 07 (MÉDIO)

Resposta correta: 0,5.

Resolução:

Seja $y = \log_{\sqrt{2}} x$. Este logaritmo atende às condições de existência se $x > 0$. Tem-se que:

$$\frac{2 + \log_{\sqrt{2}} x}{\log_{\sqrt{2}} x} = 2 - \frac{\log_{\sqrt{2}} x}{1 + \log_{\sqrt{2}} x} \Leftrightarrow \frac{2+y}{y} = 2 - \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow \frac{2+y}{y} + \frac{y}{1+y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+y}{y} + \frac{y}{1+y} = 2 \Leftrightarrow \frac{(1+y)\cdot(2+y)+y^2}{y\cdot(1+y)} = 2 \Leftrightarrow \frac{2+3y+2y^2}{y+y^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 + 3y + 2y^2 = 2\cdot(y+y^2) \Leftrightarrow 2+3y+2y^2 = 2y+2y^2 \Leftrightarrow y = -2.$$

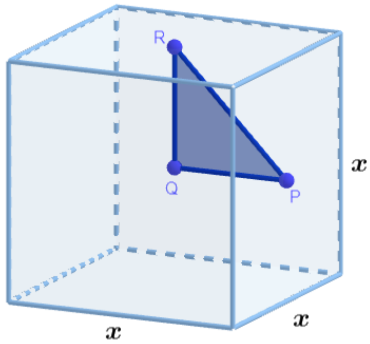
Segue que:

$$y = \log_{\sqrt{2}} x \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}} x = -2 \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = 0{,}5.$$

Questão 08 (MÉDIO)

Resposta correta: 8

Resolução: Considerando um cubo com aresta igual a x, podemos construir um triângulo retângulo PQR formado pelos centros das faces adjacentes, conforme ilustra a figura.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo PQR, tem-se que:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x^2}{4} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2cm.$$

Logo, o volume do cubo será dado por:

$$V = x^3 = 2^3 = 8cm^3.$$

Questão 09 (MÉDIO)

Resposta correta: 18

Resolução: Considere uma caixa sem tampa, em formato paralelepípedo retângulo, com dimensões x, y e z. Sabe-se que as dimensões são proporcionais aos números 1, 2 e 3, ou seja,

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = k \Leftrightarrow x = k, y = 2k, z = 3k.$$

A área total do paralelepípedo é igual a 180cm^2, ou seja,

$$xy + 2yz + 2xz = 180 \Leftrightarrow 2k^2 + 12k^2 + 6k^2 = 180 \Leftrightarrow 20k^2 = 180 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 3.$$

Como estamos considerando o valor das dimensões do paralelepípedo, devemos considerar $k = 3$ e obtemos as seguintes dimensões: $x = 3, y = 6, z = 9$. Logo, a soma das dimensões da caixa é igual a $x + y + z = 18$.

Questão 10 (MÉDIO)

Resposta: e) 6,7 m

Resolução: A distância percorrida pela bolinha será dada por:

Imediatamente antes do 1º toque no chão:

$$d_1 = 1.$$

Imediatamente antes do 2º toque no chão:

$$d_2 = 1 + 2 \cdot 0.75.$$

Imediatamente antes do 3º toque no chão:

$$d_3 = 1 + 2 \cdot 0.75 + 2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 1 + 2 \cdot 0.75 + 2 \cdot 0{,}75^2.$$

$$\vdots$$

Imediatamente antes do 11º toque no chão:

$$d_{11} = 1 + 2 \cdot 0.75 + 3 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 1 + 2 \cdot 0.75 + 2 \cdot 0{,}75^2 + \cdots + 2 \cdot 0{,}75^{10}.$$

Logo, $d_{11} = 1 + 2 \cdot S_{10}$, onde S_{10} é a soma de uma P.G. com 10 elementos, razão 0,75 e primeiro termo 0,75. Portanto,

$$S_{10} = \frac{0{,}75 \cdot (0{,}75^{10} - 1)}{0{,}75 - 1} = 2{,}83.$$

Assim, $d_{10} = 1 + 2 \cdot 2{,}83 = 6{,}7$ m.