

**Questão 01 (MÉDIO)****Resposta correta: 165****Resolução:**

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ 3 & 9 & k \end{bmatrix}$$

A soma dos elementos que estão fora da diagonal (ou seja  $\sum a_{ij}$  para  $i \neq j$ ) é igual a

$$1 + 2 + 2 + 1 + 3 + 9 = 18.$$

Portanto  $3k = \frac{18}{3} = 6 \Rightarrow k = 2$  e a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 12 & 22 & 9 \\ 11 & 15 & 8 \\ 30 & 39 & 19 \end{bmatrix}.$$

e a soma dos elementos de  $A^2$  é igual a **165**.

**Questão 02 (MÉDIO)****Resposta correta: 1**

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois ângulos positivos, distintos e suplementares. Então:  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Assim,  $\alpha = 180^\circ - \beta$ .

I) **Verdadeira.** De fato, se  $\beta$  não é obtuso, então  $\beta \leq 90^\circ$ . Como  $\alpha$  e  $\beta$  são dois ângulos distintos, teremos que  $\beta < 90^\circ$ . E assim,  $\alpha = 180^\circ - \beta \rightarrow \alpha > 90^\circ \rightarrow \alpha$  é obtuso.

II) **Falsa.** De fato, como os ângulos são suplementares, temos que as tangentes de  $\alpha$  e  $\beta$  terão sinais distintos e, portanto, o sinal do produto das tangentes de  $\alpha$  e  $\beta$  será um número negativo.

III) **Verdadeira.** De fato,  $\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta) = \operatorname{sen}(180^\circ - \beta) \cdot \operatorname{sen}(\beta) =$   
 $= (\operatorname{sen}(180^\circ) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(180^\circ)) \cdot \operatorname{sen}(\beta) = \operatorname{sen}^2(\beta) > 0.$

IV) **Verdadeira.** De fato,

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 &= (\operatorname{sen}(180^\circ - \beta))^2 + (\cos\beta)^2 = \\ &= (\operatorname{sen}(180^\circ) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(180^\circ))^2 + (\cos(\beta))^2 = (\operatorname{sen}(\beta))^2 + (\cos(\beta))^2 = 1 \end{aligned}$$

V) **Falsa.** De fato,  $\operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(180^\circ - \beta)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(180^\circ) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(180^\circ)} =$   
 $\frac{1}{\operatorname{sen}(\beta)} = \operatorname{cossec}(\beta)$

Assim, NV = 3 e NF = 2 e, portanto, NV-NF=1.

**Questão 03 (MÉDIO)****Resposta correta: 151200**

**Resolução:** Primeiramente, vamos selecionar quais serão os 8 eventos escolhidos, dentre os 10 eventos disponíveis. Esta escolha pode ser feita de  $\binom{10}{8}$  maneiras diferentes. Os 8 eventos escolhidos serão distribuídos entre os 6 profissionais, respeitando-se as condições do problema:

- o profissional P1 fica com 2 eventos. Logo, escolhemos 2 eventos para P1. A escolha pode ser feita de  $\binom{8}{2}$  maneiras diferentes.
- o profissional P2 fica com 1 evento. Logo, dos 6 eventos restantes, escolhemos 1 evento para P2. A escolha pode ser feita de  $\binom{6}{1}$  maneiras diferentes.
- o profissional P3 fica com 0 evento. Logo, dos 5 eventos restantes, não escolhemos eventos para P3. A escolha pode ser feita de  $\binom{5}{0}$  maneiras diferentes.
- o profissional P4 fica com 1 evento. Logo, dos 5 eventos restantes, escolhemos 1 evento para P4. A escolha pode ser feita de  $\binom{5}{1}$  maneiras diferentes.
- o profissional P5 fica com 1 evento. Logo, dos 4 eventos restantes, escolhemos 1 evento para P5. A escolha pode ser feita de  $\binom{4}{3}$  maneiras diferentes.
- o profissional P6 fica com 1 evento. Logo, do único evento restante, escolhemos 1 evento para P6. A escolha pode ser feita de  $\binom{1}{1}$  maneiras diferentes.

Aplicando o Princípio Multiplicativo obtemos

$$\binom{10}{8} \binom{8}{2} \binom{6}{1} \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{4}{3} \binom{1}{1} = 151200.$$

maneiras de alocar os 8 eventos entre os profissionais.

**Questão 04 (MÉDIO)****Resposta correta: 0,5.****Resolução:**

Seja  $y = \log_{\sqrt{2}} x$ . Este logaritmo atende às condições de existência se  $x > 0$ . Tem-se que:

$$\frac{2 + \log_{\sqrt{2}} x}{\log_{\sqrt{2}} x} = 2 - \frac{\log_{\sqrt{2}} x}{1 + \log_{\sqrt{2}} x} \Leftrightarrow \frac{2 + y}{y} = 2 - \frac{y}{1 + y} \Leftrightarrow \frac{2 + y}{y} + \frac{y}{1 + y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + y}{y} + \frac{y}{1 + y} = 2 \Leftrightarrow \frac{(1 + y) \cdot (2 + y) + y^2}{y \cdot (1 + y)} = 2 \Leftrightarrow \frac{2 + 3y + 2y^2}{y + y^2} = 2$$

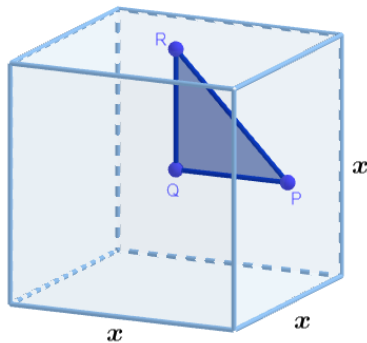
$$\Leftrightarrow 2 + 3y + 2y^2 = 2 \cdot (y + y^2) \Leftrightarrow 2 + 3y + 2y^2 = 2y + 2y^2 \Leftrightarrow y = -2.$$

Segue que:

$$y = \log_{\sqrt{2}} x \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}} x = -2 \Leftrightarrow x = (\sqrt{2})^{-2} \Leftrightarrow x = 0,5.$$

**Questão 05 (MÉDIO)****Resposta correta: 8**

**Resolução:** Considerando um cubo com aresta igual a  $x$ , podemos construir um triângulo retângulo PQR formado pelos centros das faces adjacentes, conforme ilustra a figura.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo PQR, tem-se que:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x^2}{4} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2cm.$$

Logo, o volume do cubo será dado por:

$$V = x^3 = 2^3 = 8cm^3.$$

**Questão 06 (MÉDIO)****Resposta correta: 18**

**Resolução:** Considere uma caixa sem tampa, em formato paralelepípedo retângulo, com dimensões  $x, y$  e  $z$ . Sabe-se que as dimensões são proporcionais aos números 1, 2 e 3, ou seja,

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = k \Leftrightarrow x = k, y = 2k, z = 3k.$$

A área total do paralelepípedo é igual a  $180\text{cm}^2$ , ou seja,

$$xy + 2yz + 2xz = 180 \Leftrightarrow 2k^2 + 12k^2 + 6k^2 = 180 \Leftrightarrow 20k^2 = 180 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 3.$$

Como estamos considerando o valor das dimensões do paralelepípedo, devemos considerar  $k = 3$  e obtemos as seguintes dimensões:  $x = 3, y = 6, z = 9$ . Logo, a soma das dimensões da caixa é igual a  $x + y + z = 18$ .

**Questão 7 (MÉDIO)****Resposta: e) 6,7 m****Resolução:** A distância percorrida pela bolinha será dada por:

Imediatamente antes do 1º toque no chão:

$$d_1 = 1.$$

Imediatamente antes do 2º toque no chão:

$$d_2 = 1 + 2 \cdot 0,75.$$

Imediatamente antes do 3º toque no chão:

$$d_3 = 1 + 2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,75 = 1 + 2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,75^2.$$

$$\vdots$$

Imediatamente antes do 11º toque no chão:

$$d_{11} = 1 + 2 \cdot 0,75 + 3 \cdot 0,75 \cdot 0,75 = 1 + 2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,75^2 + \dots + 2 \cdot 0,75^{10}.$$

Logo,  $d_{11} = 1 + 2 \cdot S_{10}$ , onde  $S_{10}$  é a soma de uma P.G. com 10 elementos, razão 0,75 e primeiro termo 0,75. Portanto,

$$S_{10} = \frac{0,75 \cdot (0,75^{10} - 1)}{0,75 - 1} = 2,83.$$

Assim,  $d_{10} = 1 + 2 \cdot 2,83 = 6,7$  m.

**Questão 8 (DIFÍCIL)****Resposta correta: 15**

**Resolução:** Primeiramente devemos fixar uma face do cubo e escolher 1 das 5 cores disponíveis para pintá-la. A coloração pode ser feita de  $\binom{5}{1}$  maneiras distintas. A face oposta deve ser pintada com a mesma cor escolhida para a face fixada. A coloração pode ser feita de  $\binom{1}{1}$  maneiras distintas. As 4 cores que restaram serão utilizadas para colorir as faces laterais do cubo e esta coloração envolverá uma permutação circular. Neste caso, a coloração pode ser feita de  $(4 - 1)! = 3!$  maneiras distintas. Utilizando Princípio Multiplicativo, a coloração pode ser feita de

$$\frac{\binom{5}{1} \cdot 3!}{2} = 15$$

maneiras distintas.

A divisão por 2 exclui as colorações repetidas quando invertemos as faces opostas por meio de uma rotação.



**Questão 9 (DIFÍCIL)****Resposta correta: c)  $(-1,1) \cup (1,3)$ .****Resolução:** Para que a fração seja imprópria, devemos ter:

$$f(a) + 2 + a > a - 1 \quad \text{com } a \neq 1.$$

Temos que  $f(a) = 2a - a^2$ . Assim, basta resolver a inequação:

$$2a - a^2 + 2 + a > a - 1 \Leftrightarrow -a^2 + 2a + 3 > 0.$$

**Estudando o sinal da parábola  $-a^2 + 2a + 3$ :**

As raízes da equação  $-a^2 + 2a + 3 = 0$  são  $a = -1$  e  $a = 3$ . Como a parábola tem concavidade para baixo, temos que  $-a^2 + 2a + 3 > 0$  no intervalo  $(-1,3)$ . Portanto, a fração é imprópria se  $a \in (-1,3)$  com  $a \neq 1$  ou  $(-1,1) \cup (1,3)$ .

**Questão 10 (DIFÍCIL) - CANCELADA**