GABARITO

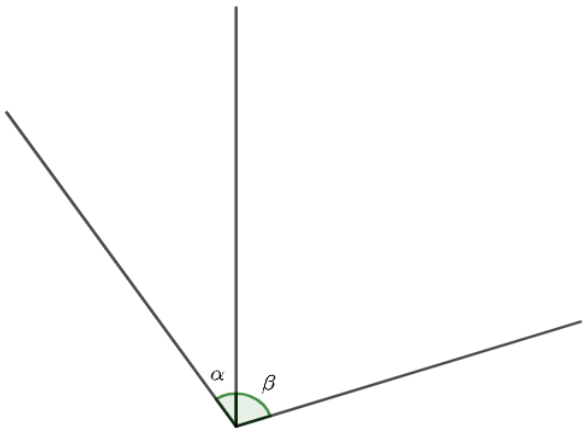
Questão 01)

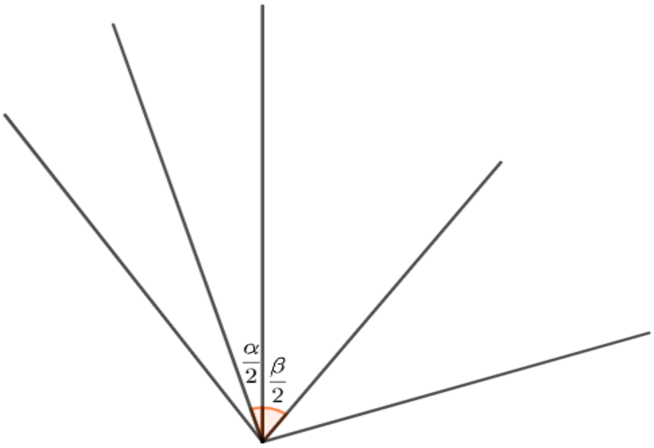
Resposta correta: $\alpha = 28$

Resolução:

Sejam α e β dois ângulos consecutivos (veja figura abaixo a esquerda). Como suas bissetrizes formam um ângulo de 52°, temos que:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 52.$$





Por outro lado, temos que o ângulo α mede o dobro do complementar de β , assim, $\alpha = 2(90 - \beta)$, ou ainda, $\alpha + 2\beta = 180$

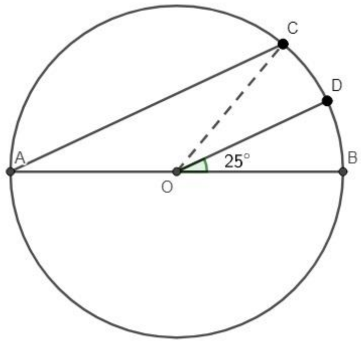
Assim,

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 52 \\ \alpha + 2\beta = 180 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $\alpha = 28$ e $\beta = 76$.

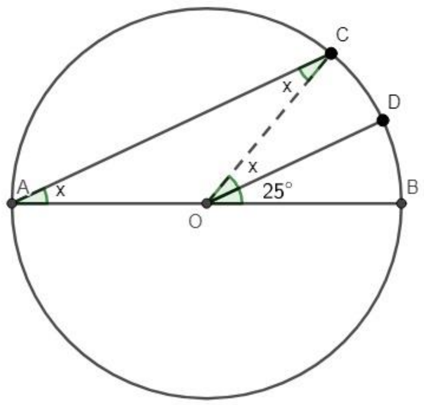
Questão 02)
Resposta correta: 25
Resolução:

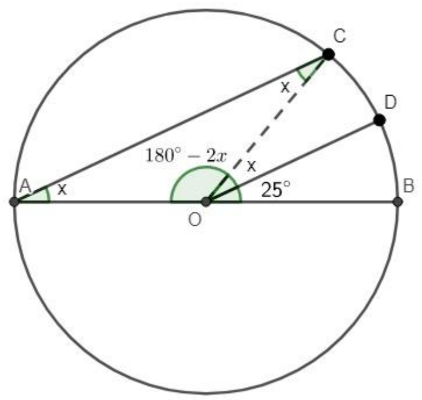
Trace o segmento OC, como na figura abaixo.



Observe que o triângulo AOC é isósceles (pois os lados AO e OC são raios da circunferência). Assim, $O\hat{C}A = O\hat{A}C = x$.

Como AC e OD são paralelos, temos que $C\hat{O}D = x$ (veja figura abaixo à esquerda). Por outro lado, $C\hat{O}A = 180° - (O\hat{A}C + O\hat{C}A) = 180° - 2x$, pois $C\hat{O}A$, $O\hat{A}C$ e $O\hat{C}A$ são ângulos internos do triângulo AOC (veja figura abaixo à direita).





Assim, $180° - 2x + x + 25° = 180° \rightarrow x = 25°$.

Questão 03)

Resposta correta: c) FVV

Resolução:

Analisando as duas opções:

Banco X: $M_X(t) = 10000 + 200\,t$

Banco Y: $M_y(t) = 10000(1.01)^t$

I. **Falsa.**
Como a taxa do juros simples é maior que a dos juros compostos, por um certo período de tempo o valor dos juros simples supera o dos juros compostos.

II. **Verdadeira.**
Ambas as funções são sempre crescentes. Em $t = 0$:

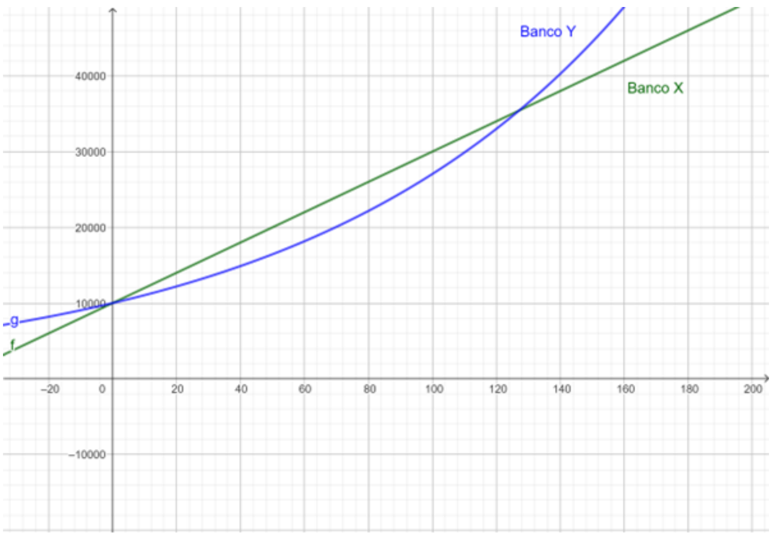
$$M_X(0) = M_Y(0) = 10000$$

Como ambas as funções são crescentes, se elas se interceptarem em algum tempo $t > 0$ isso ocorrerá apenas uma vez.
Em $t = 18$ temos $M_X(18) = 13600$ e $M_Y(18) = 11{,}961{,}47$ e dessa forma, para qualquer $t < 18,$ o valor de M_X será maior que M_Y. Assim, a dívida referente ao empréstimo feito no Banco Y será menor que a dívida no Banco X.

III. **Verdadeira.**

$M_X(5) = 11000$ e $M_Y(5) = 10510{,}1.$

Assim, $M_X(5) - M_Y(5) = 489{,}90.$



Questão 04)

Resposta correta: 6

Resolução:

Pelo gráfico é possível observar que:

a) $\mathrm{f}(0) = 4$. Assim, teremos que $a \cdot \cos(0) + b = 4$ e, portanto, $a + b = 4$.

b) $g(0) = 2$. Assim, teremos que $0^2 + k = 2$, e, portanto, $k = 2$.

Assim, temos que $a + b + k = 4 + 2 = 6$.

Questão 05)

Resposta correta: b) Somente as afirmações II e V são verdadeiras.
Resolução:

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ idempotente. Assim, $A^2 = A$.

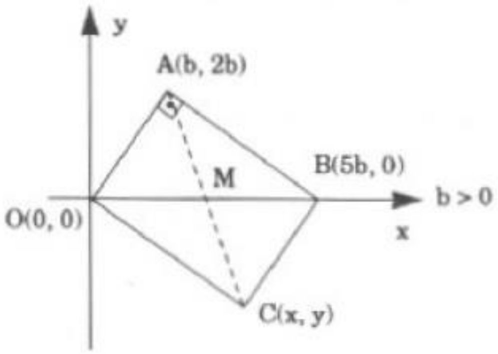
$$A^2 = A \quad \Longrightarrow \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + bc = a \\ ab + bd = b \\ ac + dc = c \\ cb + d^2 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = a - a^2 \\ b(a + d - 1) = 0 \\ c(a + d - 1) = 0 \\ cb = d - d^2 \end{cases}$$

I. **Falsa.** Não podemos afirmar que $b = c = 0$, pois as equações acima admitem outras soluções.
II. **Verdadeira.** Na equação $b(a + d - 1) = 0$ temos que $b = 0 \; ou \; (a + d - 1) = 0$. Portanto, se $b \neq 0, então \; a + d = 1$
III. **Falsa.** Na equação $c(a + d - 1) = 0$ temos que $c = 0 \; ou \; (a + d - 1) = 0$. Portanto, se $c \neq 0, então \; a + d = 1, e \; não \; a - d = 1$
IV. **Falsa.** A condição para a matriz A ser idempotente não envolve o valor do determinante em nenhuma das equações acima.
V. **Verdadeira.** Das equações $bc = a - a^2$ e $cb = d - d^2$, podemos concluir que $a^2 - a = d^2 - d$

Questão 06)
Resposta correta: d) (4b,-2b)
Resolução:

Vamos fazer um desenho da situação.



Suponha que $C = (x, y)$ seja o quarto vértice do retângulo OABC e suponha que M é o ponto de intersecção das diagonais.

Neste sentido, temos que o ponto médio $\overline{OB}$ é essencialmente dado por:

$$M = \left(\frac{5b+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{5b}{2}, 0\right).$$

Por outro lado, o ponto médio de $\overline{AC}$ é dado por:

$$M = \left(\frac{x+b}{2}, \frac{y+2b}{2}\right).$$

Neste sentido, temos que:

$$M = \left(\frac{5b}{2}, 0\right) = \left(\frac{x+b}{2}, \frac{y+2b}{2}\right).$$

Comparando as coordenadas, temos que:

$$\begin{cases} \dfrac{5b}{2} = \dfrac{x+b}{2} \\ 0 = \dfrac{y+2b}{2} \end{cases}$$

Assim, $x = 4b$ e $y = -2b$.

Questão 07)
Resposta correta: 18
Resolução:

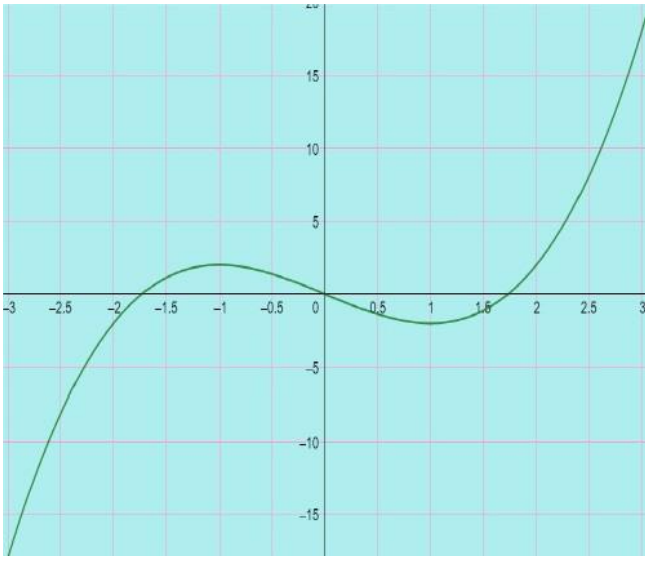
Vamos encontrar uma forma equivalente da condição $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.

Observe que $x^4 - 13x^2 + 36 = (x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$.

Assim, $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0 \iff (x-3)(x-2)(x+2)(x+3) \leq 0$.

A desigualdade acima e satisfeita se, e somente se $x \in [-3,-2] \cup [2,3]$.

O esboço do gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$ nos fornece que f é crescente em $[-3,-2]$ e em $[2,3]$.



Neste sentido, o valor máximo é $máx\{f(-2), f(3)\} = \{-2, 18\} = 18$

Questão 08)

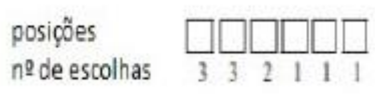
Resposta correta: 42

Resolução:

Números divisíveis por 25 devem terminar em 25 ou em 50.

Caso 1

Números terminando em 25:

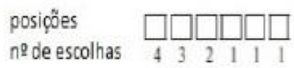


Usando o princípio fundamental da contagem, temos que:

$$T_1 = 3.3.2.1.1.1 = 18$$

Caso 2

Números terminando em 50:



Usando o princípio fundamental da contagem, temos que:

$$T_2 = 4.3.2.1.1.1 = 24$$

Assim, a quantidade de números de seis dígitos divisíveis por 25 podem ser formados usando os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 sem repetições é

$$Total = T_1 + T_2 = 18 + 24 \ = \ 42.$$

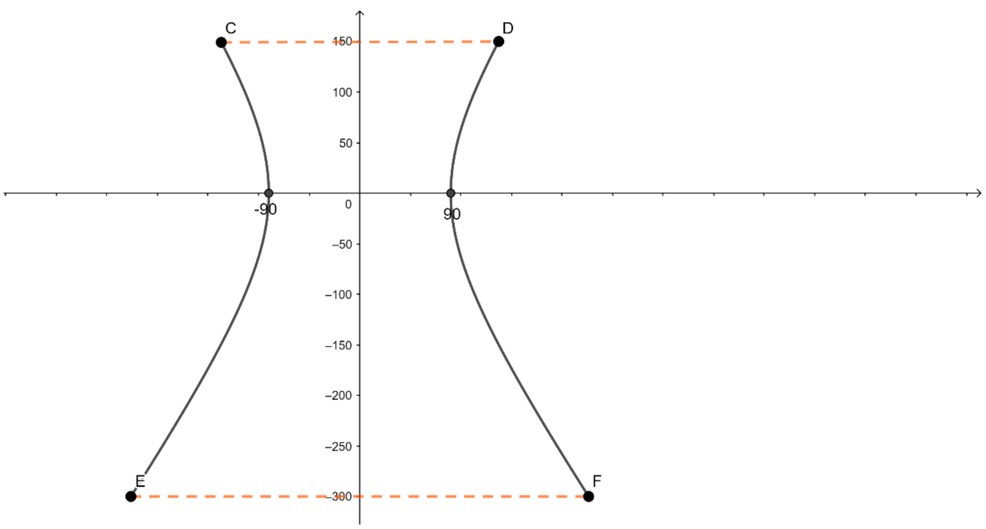
Questão 09)

Resposta correta: e) 274,84 pés e 452,71 pés.

Resolução:

Como a torre tem 450 pés de altura e a distância do topo da torre ao centro da hipérbole é metade da distância da base da torre ao centro da hipérbole (veja a figura abaixo), teremos que:

- A distância do topo da torre ao centro da hipérbole será de 150 pés;
- A distância da base da torre ao centro da hipérbole será de 300 pés.



Considere os pontos da hipérbole $C = (x_1, 150)$, $D = (x_2, 150)$, $E = (x_3, -300)$, $F = x_4, -300)$.

Assim, o diâmetro do topo é igual ao comprimento do segmento CD e o diâmetro da base da torre é igual ao comprimento do segmento EF.

Para calcular CD e EF, vamos primeiro encontrar os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4.

Quando y=150, temos:

$$\frac{x^2}{90^2} - \frac{150^2}{130^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{18884.02} \ = \pm 137.42$$

Assim, $x_1 = -137.42$ e $x_2 = 137.42$.

Quando y=-300, temos:

$$\frac{x^2}{90^2} - \frac{(-300)^2}{130^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{51236.09} \ = \pm 226.35$$

Assim, $x_3 = -226.35$ e $x_4 = 226.35$.

Assim, o diâmetro do topo da torre é igual a 274.84 e diâmetro da base da torre é igual a 452.71.

Questão 10)
Resposta correta: 1
Resolução:

Temos que $f(x+1)-2=g(x)$.

Assim, $g(x-1)=f\big((x-1)+1\big)-2=f(x)-2$. Portanto, $f(x)=g(x-1)+2$.

Como $g(x)=x^3$, temos que $f(x)=(x-1)^3+2$.

Logo, $a=-1$ e $b=2\ \rightarrow a+b=-1+2=1$

Questão 11)

Resposta correta: 301

Resolução:

O mínimo múltiplo comum entre 2, 3, 4, 5 e 6 é 60. Assim, precisamos determinar um múltiplo de 7 que é maior por 1 unidade do que um múltiplo de 60.

Em outras palavras,

$$60n + 1 = \underbrace{56n}_{7\cdot 8n} + 4n + 1 = (7 \cdot 8n) + 4n + 1$$

Neste sentido, o número $60n + 1$ é divisível por 7 somente se $(4n + 1)$ for divisível por 7.

O menor valor de n que satisfaz esta condição é o $n = 5$.

Portanto, o menor número de ovos que estavam na cesta é:

$60 \cdot n + 1 = 60 \cdot 5 + 1 = 301$ ovos.

Questão 12)

Resposta correta: e) 0

Resolução:

I. **Falsa .** São 3 pontos de interseção.

De fato, $\frac{3x}{x-1} = x^2 \rightarrow x^2(x-1) = 3x \rightarrow x^3 - x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 3) = 0$

Assim, $x = 0$ ou $x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 13 > 0 \rightarrow$ 2 soluções distintas

II. **Falsa .**

$f(g(x)) = \frac{3x^2}{x^2-1} \rightarrow \mathrm{Dom}\left(f(g(x))\right) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

$g(f(x)) = \left(\frac{3x}{x-1}\right)^2 \rightarrow \mathrm{Dom}\left(g(f(x))\right) = \mathbb{R} - \{1\}$

III. **Verdadeira,** pois $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

De fato, $f(x_1) = \frac{3x_1}{x_1-1}$ e $f(x_2) = \frac{3x_2}{x_2-1}$

Assim, $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{3x_1}{x_1-1} = \frac{3x_2}{x_2-1} \rightarrow 3x_1(x_2 - 1) = 3x_2(x_1 - 1) \rightarrow 3x_1x_2 - 3x_1 = 3x_2x_1 - 3x_2 \rightarrow -3x_1 = -3x_2 \rightarrow x_1 = x_2$

IV. **Verdadeira.**

De fato, $f(x^2 + 2) = \frac{3(x^2+2)}{x^2+2-1} = \frac{3x^2+6}{x^2+1}$. Assim,

$\mathrm{Dom}(f(x^2 + 2)) = \mathbb{R}$

Logo, $n = 2$ e $m = 2 \rightarrow m - n = 0$

Questão 13)

Resposta correta: $-\frac{1}{2}$

Resolução:

$$AB + A^T = \begin{bmatrix} x+y & -x+yz \\ 1 & -2-z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 2 \\ y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y & -x+yz+2 \\ 1+y & -3-z \end{bmatrix}$$

$$AB + A^T = C \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2x+y & -x+yz+2 \\ 1+y & -3-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y & -x+2y \\ 2y & z-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+y = -2y \\ -x+yz+2 = -x+2y \\ 1+y = 2y \\ -3-z = z-3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

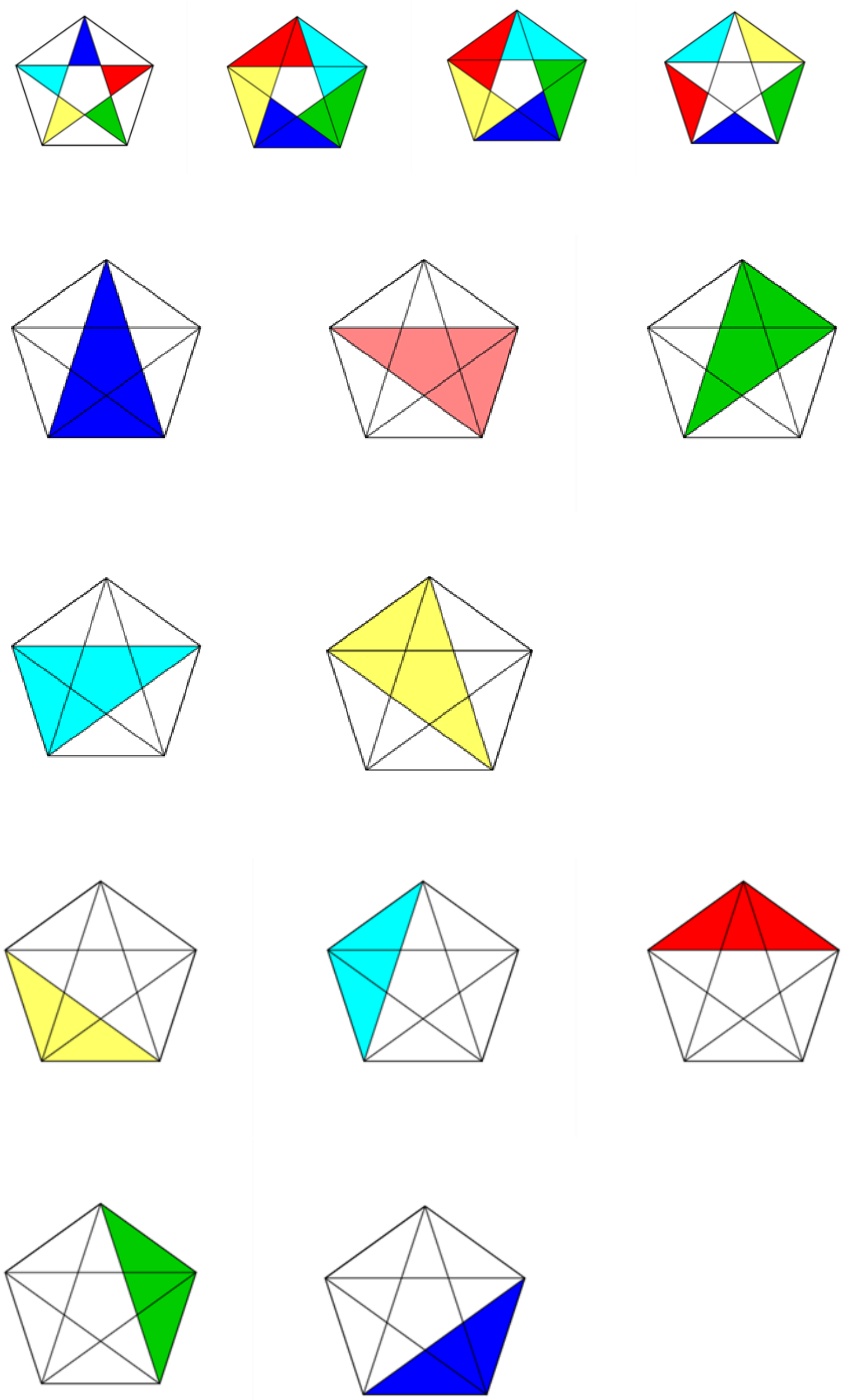
$x = -\frac{3}{2}$, $y = 1$, $z = 0$ $\rightarrow$ $x + y + z = -\frac{1}{2}$

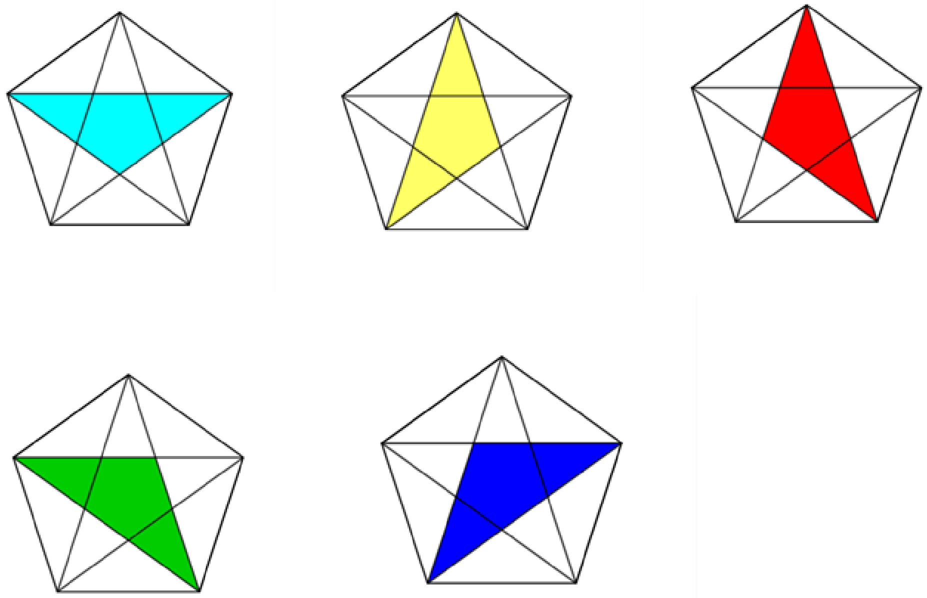
Questão 14)

Resposta correta: 35

Resolução:

Considerando a imagem abaixo, é possível ver que existem 7 tipos de triângulos na figura e cada tipo de triângulo admite 5 triângulos rotacionados. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem triângulos.





Questão 15)

Resposta correta: a) Apenas os itens I e III são verdadeiros.

Resolução:

I. **Verdadeiro**. A função $f(x)$ é uma função linear, portanto o gráfico é uma reta. Além disso, quando $x = 0$, temos que $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, portanto a reta intercepta o eixo y no ponto $(0, b)$.

II. **Falso.** A função $g(x)$ é uma função quadrática com concavidade determinada pela constante c. Assim, quando $c < 0$, temos que a concavidade é para baixo.

III. **Verdadeiro.** Quando $c > 0$, temos que o gráfico da função $g(x) = cx^2$ é uma parábola côncava para cima com vértice no ponto $(0,0)$. Assim, $g(x) \geq 0$ para todo valor de x.

IV. **Falso.** A constante a determina o crescimento da função $f(x) = ax + b$. Assim, se $a < 0$, a função $f(x)$ é decrescente independentemente do valor de b.

V. **Falso.** Observe que $f\big(g(x)\big) = f(cx^2) = a \cdot (cx^2) + b = acx^2 + b$ e $g\big(f(x)\big) = g(ax + b) = c \cdot (ax + b)^2 = c \cdot (a^2x^2 + 2abx + b^2) = a^2cx^2 + 2abcx + b^2c$. Assim, $f\big(g(x)\big) \neq g\big(f(x)\big)$.

Questão 16)

Resposta correta: c) Se $[\cos(\beta)]^2 = 0{,}36$, então $\text{sen}(\beta) = 0{,}8$.

Resolução:

Como α é um ângulo do primeiro quadrante, temos que $\cos(\alpha) \geq 0$ e $sen(\alpha) \geq 0$.
Como β é um ângulo do terceiro quadrante, temos que $\text{sen}(\beta) \leq 0$ e $\cos(\beta) \leq 0$.
Assim,

a) Verdadeira, pois:

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} \geq 0 \;\; \text{e} \;\; tg(\beta) = \frac{sen(\beta)}{\cos(\beta)} \geq 0.$$

b) Verdadeira, pois:
Se $\beta - \alpha = \pi$, temos que $tg(\beta - \alpha) = tg(\pi) = 0$.
Assim, $tg(\beta - \alpha) = \frac{tg(\beta) - tg(\alpha)}{1 + tg(\beta) \cdot tg(\alpha)} = 0$.
Logo, $tg(\beta) - tg(\alpha) = 0 \; \rightarrow \; tg(\beta) = tg(\alpha)$.

c) Falsa, pois, como β é um ângulo do terceiro quadrante, temos que $\text{sen}(\beta) \leq 0$.

d) Verdadeira, pois:

Se $[\cos(\alpha)]^2 = 0{,}36$, então $(sen(\alpha))^2 = 1 - \left(\cos(\alpha)\right)^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$. Assim, $sen(\alpha) = 0{,}8$ (α é um ângulo do primeiro quadrante).

e) Verdadeira, pois $sen(\alpha) \geq 0$ e $\text{sen}(\beta) \leq 0$, assim, $\text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \leq 0$.

Questão 17)
Resposta correta: 3
Resolução:

O volume da água é dado pelo volume do copo em formato de cone, ou seja:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3}{3} = 27\pi.$$

Dessa forma, o volume ocupado no copo cilíndrico será de 27π e, portanto, temos que:

$$V_{ocupado\ no\ copo\ cilídrico} = \pi \cdot 3^2 \cdot h = 27\pi,$$

onde h é a altura que a água atingirá no copo.

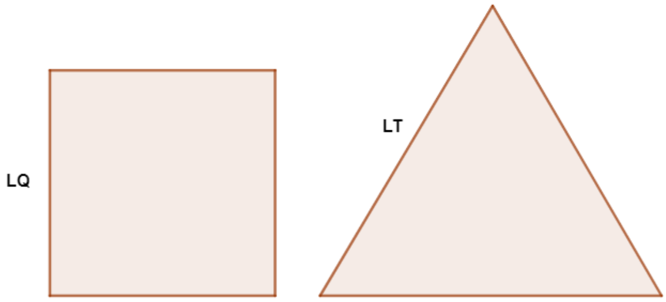
Assim, concluímos que h = 3 cm.

Questão 18)

Resposta correta: b) $\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{2}$

Resolução:

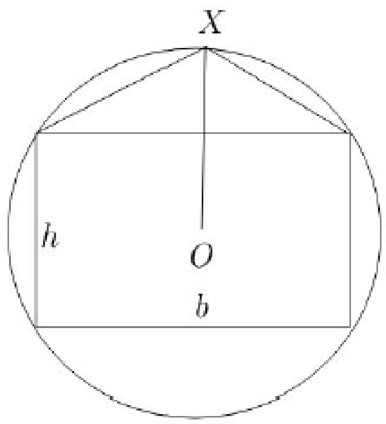
Considere um quadrado de lado LQ e um triângulo equilátero de lado LT que possuem a mesma área A.



Temos que $A = (LQ)^2$ e $A = \frac{(LT)^2\sqrt{3}}{4}$. Portanto, $(LQ)^2 = \frac{(LT)^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow \frac{(LQ)^2}{(LT)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow$
$\frac{(LQ)^2}{(LT)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \frac{LQ}{LT} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}} \rightarrow \frac{LQ}{LT} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{2}$

Questão 19)
Resposta correta: 0.4
Resolução:

O raio OX, conforme exibe a figura abaixo, tem comprimento igual à soma de $\frac{h}{2}$ com a altura do triângulo.



Neste sentido, a altura do triangulo é dada por $1 - \frac{h}{2}$.

Assim, $A_{triângulo} = \frac{b \cdot (1-\frac{h}{2})}{2}$ e $A_{retângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$.

Se o triangulo e o retângulo tem a mesma área, então:

$$\frac{b \cdot (1-\frac{h}{2})}{2} = \frac{b \cdot h}{2} \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{h}{2}\right) = h \quad \rightarrow h = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Questão 20)
Resposta correta: 256
Resolução:

Observe que:

$$2^{2048} = 2^{2\cdot 1024} = (2^2)^{1024} = 4^{1024} = 4^{2\cdot 512} = (4^2)^{512} = 16^{512} = 16^{2\cdot 256} = (16^2)^{256} = 256^{256}.$$

Assim, $x^x = 2^{2048} \rightarrow x^x = 256^{256} \rightarrow x = 256.$

Questão 21)
Resposta correta: 37
Resolução:

A matriz de transição que representa as probabilidades de escolha da loja I, da loja II ou da loja III é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Assim, sabendo que em um determinado dia foram retirados 20 carros na loja I, 30 na loja II e 40 na loja III, temos:

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 37 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Logo, a quantidade de carros que estará na loja II após a devolução no dia será de 37.

Questão 22)
Resposta correta: b) x
Resolução:

Segue da relação dada que:

$f\left(x+2\sqrt{x}\right) = x + 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x})^2 + 2\cdot\sqrt{x}\cdot 2 + 2^2 = (\sqrt{x}+2)^2.$

Ou seja, $f\left(x+2\sqrt{x}\right) = (\sqrt{x}+2)^2.\ (I)$

Vamos fazer uma mudança de variável $m = x + 2\sqrt{x}.\ (II)$

Assim, $m = x + 2\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 + 2\cdot\sqrt{x}\cdot 1.$

Fazendo o procedimento de completar quadrado, temos que:

$m = (\sqrt{x})^2 + 2\cdot\sqrt{x}\cdot 1 + 1^2 - 1^2 \rightarrow m + 1 = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{x}\cdot 1 + 1^2 = (\sqrt{x}+1)^2.$

Ou seja, $m + 1 = (\sqrt{x}+1)^2.$

Então $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{m+1} \quad \rightarrow \quad \sqrt{x} = \sqrt{m+1} - 1\ (III)$

Substituindo II e III em I, temos:

$f(m) = (\sqrt{x}+2)^2 = (\sqrt{m+1} - 1 + 2)^2 = (\sqrt{m+1}+1)^2.$

Ou seja, $f(m) = (\sqrt{m+1}+1)^2.$

Avaliando a função acima em $x - 2\sqrt{x}$, temos que:

$$f\left(x-2\sqrt{x}\right) = (\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + 1)^2$$

$$f\left(x-2\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} + 1^2} + 1\right)^2$$

$$f\left(x-2\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} + 1\right)^2$$

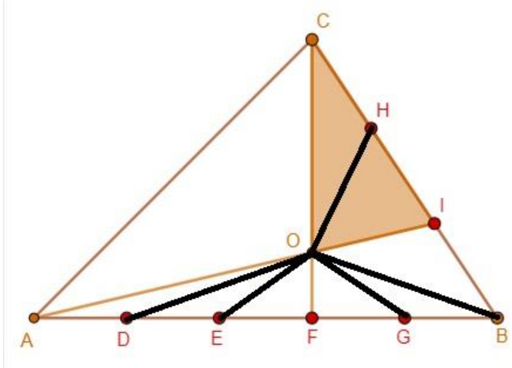
$$f\left(x-2\sqrt{x}\right) = \left(\left(\sqrt{x}-1\right) + 1\right)^2$$

$$f\left(x-2\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2$$

$$f\left(x-2\sqrt{x}\right) = x$$

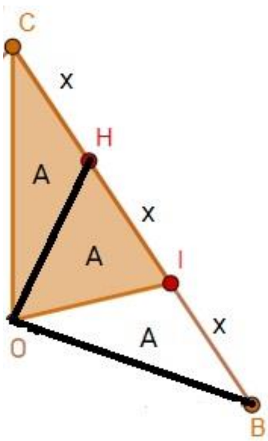
Questão 23)
Resposta correta: 8
Resolução:

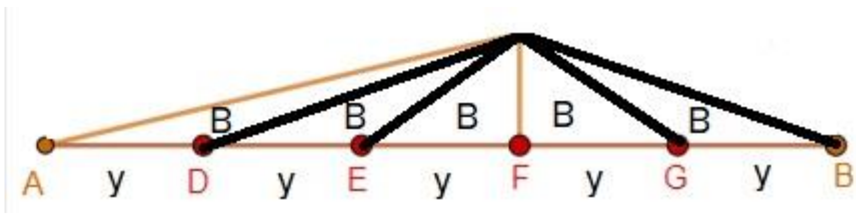
Ligue o ponto O aos pontos D, E, G, B e H (como na figura abaixo).



Observe que os triângulos OCH, OHI, OIB possuem a mesma altura (partindo do ponto O) que o triângulo OCB.

Como CH=HI=IB, teremos que os triângulos OCH, OHI, OIB possuem a mesma medida para a base, digamos x (veja figura abaixo à esquerda), e a mesma altura. Assim, $A_{OCH} = A_{OHI} = A_{OIB} = A$.





Analogamente, os triângulos AOD, DOE, EOF, FOG, GOB possuem a mesma altura (partindo do ponto O) que o triângulo AOB.

Como AD=DE=EF=FG=GB, teremos que os triângulos AOD, DOE, EOF, FOG, GOB possuem a mesma medida para a base, digamos y (veja figura acima à direita) e a mesma altura. Assim, $A_{AOD} = A_{DOE} = A_{EOF} = A_{FOG} = A_{GOB} = B$.

Por outro lado, seja h_1 a altura do triângulo ABC relativa ao lado CB e h_2 a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB.

Assim, a área do triângulo ABC é dada por:

$$A_{ABC} = \frac{5y \cdot h_2}{2} \text{ ou } A_{ABC} = \frac{3x \cdot h_1}{2}.$$

Como $A_{ABC} = 39$, teremos que $y \cdot h_2 = 15.6$ e $x \cdot h_1 = 26$.

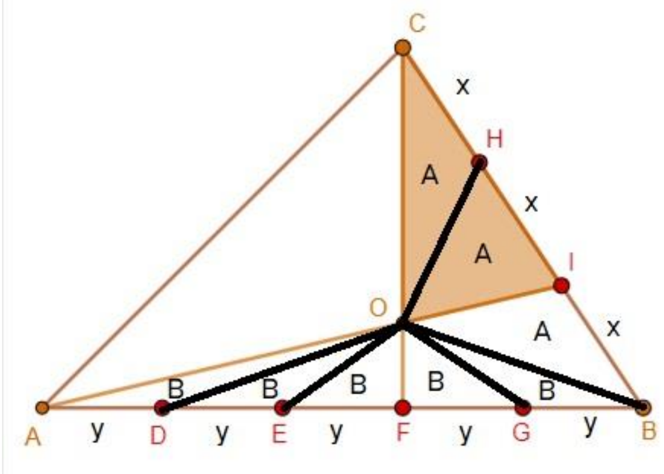
Observe que o triângulo FBC tem a mesma altura (relativa ao lado FB) que o triângulo ABC (relativa ao lado AB), ou seja, h_2.

Portanto, $A_{FBC} = \frac{2y \cdot h_2}{2} = y \cdot h_2 = 15.6$.

Analogamente, o triângulo AIB tem a mesma altura (relativa ao lado IB) que o triângulo ABC (relativa ao lado BC), ou seja, h_1.

Portanto, $A_{AIB} = \frac{x \cdot h_1}{2} = \frac{26}{2} = 13$.

Por outro lado, temos que $A_{FBC} = 3A + 2B$ e $A_{AIB} = 5B + A$ (veja figura abaixo).



Assim, $\begin{cases} 3A + 2B = 15.6 \\ A + 5B = 13 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema temos que B = 1.8 e A = 4.

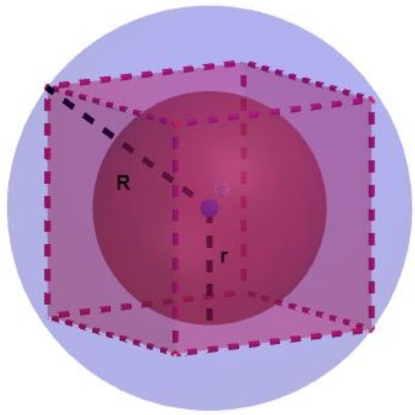
Assim, a área do triângulo OIC é 2A=2.4=8.

Questão 24)

Resposta correta: 36

Resolução:

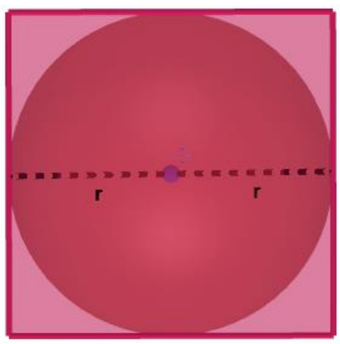
Considere r o raio da circunferência inscrita no cubo e R o raio da circunferência circunscrita no cubo, como na figura abaixo.

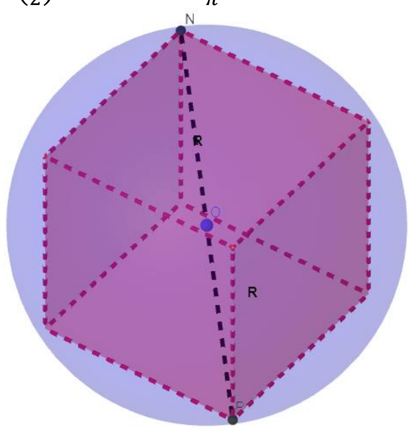


Observe que a medida do diâmetro da esfera inscrita é igual a medida da aresta do cubo, portanto, se a é a medida da aresta do cubo, teremos que $a = 2r$ (veja figura abaixo à esquerda).

Como o volume da esfera inscrita é igual a $4\sqrt{3}$, teremos então que:

$$V_{esfera\ inscrita} = \frac{4}{3}\pi r^3 \ \rightarrow\ 4\sqrt{3} = \frac{4}{3}\pi r^3 \ \rightarrow\ 4\sqrt{3} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 \ \rightarrow a^3 = \frac{24\sqrt{3}}{\pi}\ .$$





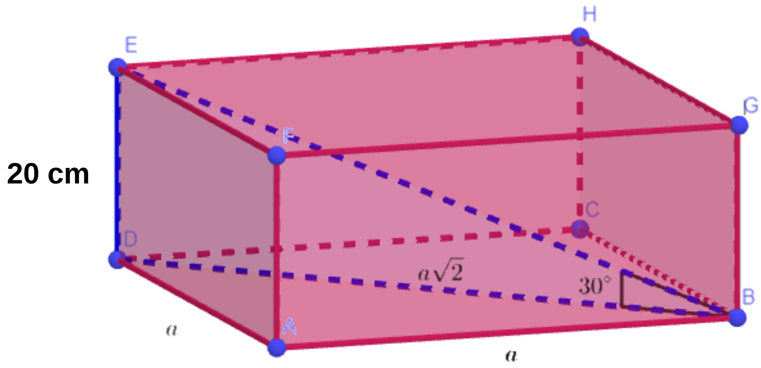
Por outro lado, a diagonal do cubo é um diâmetro da esfera circunscrita e, portanto, $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (veja figura acima à direita).

Assim, $V_{esfera\ circunscrita} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3 3\sqrt{3}}{8} = \pi\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Como $a^3 = \frac{24\sqrt{3}}{\pi}$, temos então que: $V_{esfera\ circunscrita} = \pi\frac{\frac{24\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{3}}{2} = \pi\frac{24\cdot 3}{2\pi} = 36.$

Questão 25)
Resposta correta: d) 12000
Resolução:

Como a base do paralelepípedo é quadrada, temos que a diagonal da base DB é dada por $a\sqrt{2}$ (veja figura abaixo).



Observe que no triângulo DBE temos a seguinte relação:

$$tg(30°) = \frac{20}{a\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{20}{a\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad a = \frac{60}{\sqrt{6}}.$$

Assim, o volume do paralelepípedo é:

$$V_{paralelepípedo} = A_{base} \cdot altura = a^2 \cdot 20 = \left(\frac{60}{\sqrt{6}}\right)^2 \cdot 20 = 12000.$$