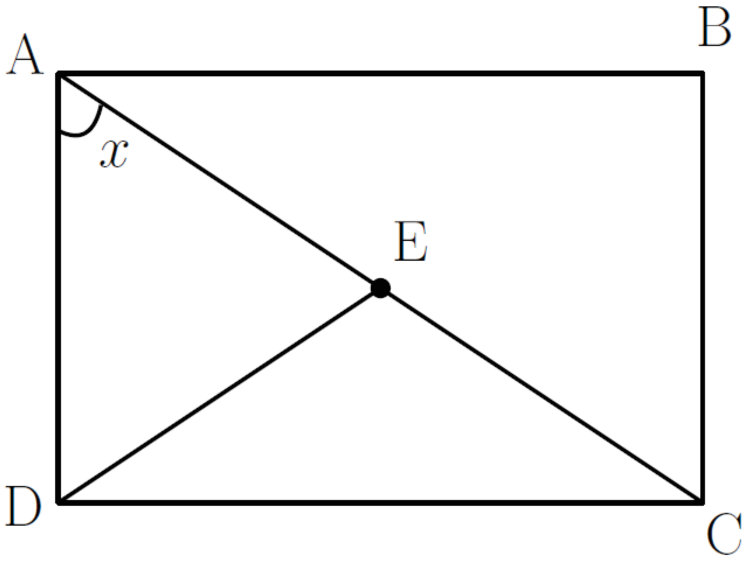
Questão 01

Resposta: **60**



Como DEC é um triângulo isósceles com base DC, temos que:

$$E\widehat{D}C = E\hat{C}D = y$$

Assim, como o ângulo $D\hat{E}C$ mede 120°, no triângulo DEC temos que

$$120° + y + y = 180°$$

$$2y = 180° - 120°$$

$$2y = 60°$$

$$y = 30°$$

Como ABCD é um retângulo, temos que o ângulo $A\widehat{D}C$ mede 90°.

Por outro lado, $A\widehat{D}C = A\widehat{D}E + E\widehat{D}C$, ou seja:

$$90° = A\widehat{D}E + 30°$$

$$A\widehat{D}E = 60°$$

Além disso, $A\hat{E}D = 180° - D\hat{E}C = 180° - 120° = 60°$.

Logo, no triângulo ADE temos:

$$E\hat{A}D + A\widehat{D}E + A\hat{E}D = 180°$$

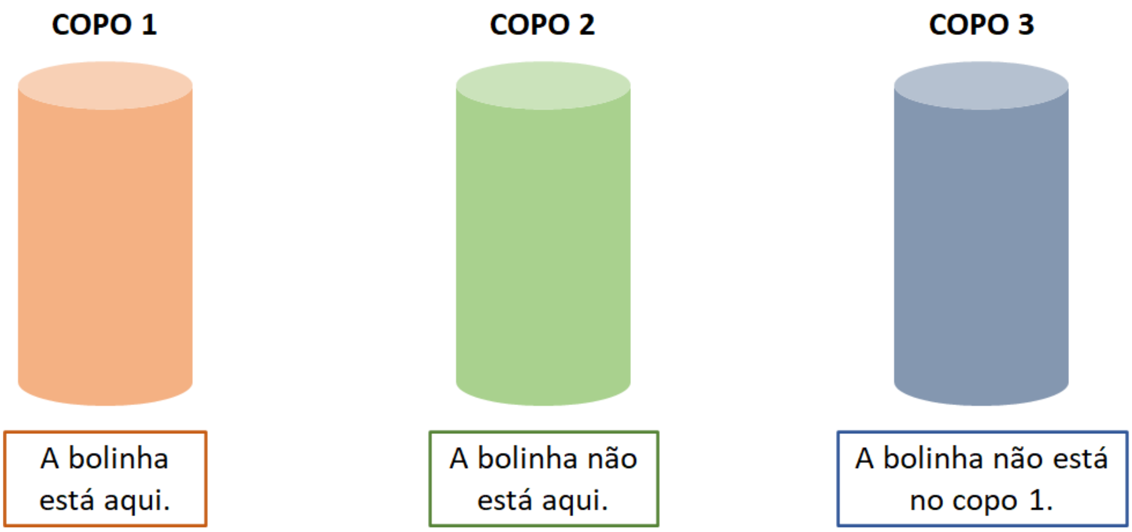
$$x + 60° + 60° = 180°.$$

$$x = 180° - 60° - 60°$$

$$x = 60°$$

Questão 02

Resposta: **(B)**



Para resolver esta questão, vamos supor que a bolinha está debaixo de determinado copo e analisamos se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Lembrando que só há uma afirmação verdadeira.

Local da Bolinha	**Afirmação do Copo 1**	**Afirmação do Copo 2**	**Afirmação do Copo 3**	**Status**
COPO 1	VERDADEIRA	VERDADEIRA	FALSA	Não pode ser pois tem duas afirmações verdadeiras.
COPO 2	FALSA	FALSA	VERDADEIRA	Correto. Só há uma afirmação verdadeira.
COPO 3	FALSA	VERDADEIRA	VERDADEIRA	Não pode ser pois tem duas afirmações verdadeiras.

Pela tabela acima, podemos concluir que a bolinha está debaixo do copo 2.

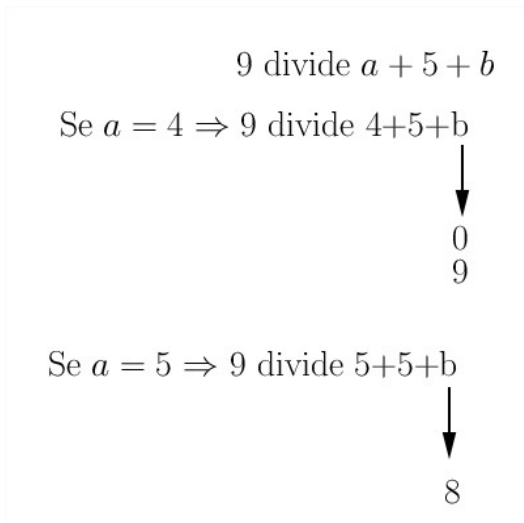
Questão 3

Resposta: 1467.

Solução:

Dado que o algarismo da dezena de N é igual a 5, então vamos supor que N seja representado pelo numeral $a5b$. Como $400 < N < 600$, então $a \in \{4, 5\}$. Outra informação dada é que 9 divide $N = a5b$, então aplicando o critério de divisibilidade por 9, temos que 9 divide $a + 5 + b$.

Vamos analisar as possibilidades:



Logo, os números procurados são: 450, 459 e 558. Temos que: $450 + 459 + 558 = 1467$.

A soma dos números é igual a: 1467.

Questão 04

Resposta: **45**

Vamos analisar a tabela da pesquisa amostral.

CANDIDATO	**QUANTIDADE DE PESSOAS**
ALPHA	255
BETA	378
GAMA	132
DELTA	75
BRANCO / NULO	160

Pela tabela, percebemos que o total de entrevistados foi 1000 (basta somar 255+378+132+75+160 = 1000).

No caso, o vitorioso seria o candidato BETA, com 378.

Para calcular o percentual de votos do candidato BETA em relação aos votos válidos, precisamos descontar os votos BRANCO/NULO (160).

Votos Válidos: 1000 – 160 = 840

Porcentagem do candidato BETA: $\left(\frac{378}{840}\right) \times 100\% = 45\%$

A hipótese do enunciado é de que a proporção no dia da eleição foi a mesma da pesquisa, por isso não importa o número de votantes, basta considerar o valor amostral da tabela.

Questão 05

Resposta: **(C)**

Vamos considerar as funções dadas e analisar cada um dos itens de (A) a (E).

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 4 \\ g(x) = x^2 - x - 2 \end{cases}$$

- **Item (A) –** INCORRETO

  A função g(x) é do segundo grau.

- **Item (B) –** INCORRETO

  Calculando as raízes da função g(x).

  $$g(x) = 0$$
  $$x^2 - x - 2 = 0$$

  Calculando o discriminante (Δ):

  $$\Delta = b^2 - 4ac$$
  $$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2)$$
  $$\Delta = 1 + 8$$
  $$\Delta = 9 \rightarrow (2\ raízes\ reais)$$

  Calculando as raízes:

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
  $$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2(1)}$$
  $$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$
  $$x_1 = \frac{1 + 3}{2} = 2$$
  $$x_2 = \frac{1 - 3}{2} = -1$$

- **Item (C) –** CORRETO

  Calculando a raiz da função f(x):

  $$f(x) = 0$$
  $$2x - 4 = 0$$
  $$2x = 4$$
  $$x = 2$$

- **Item (D) –** INCORRETO

  Como já calculado no item (B), as raízes são 2 e -1.

- **Item (E) –** INCORRETO

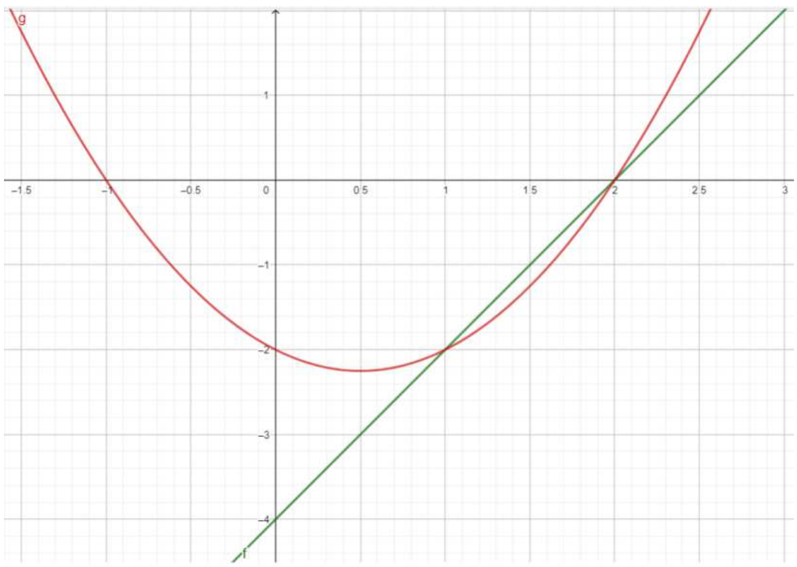
  Para verificar se há pontos de interseção, precisamos fazer:

$$f(x) = g(x)$$
$$2x - 4 = x^2 - x - 2$$
$$0 = -2x + 4 + x^2 - x - 2$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$
$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 1}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

Há 2 pontos de interseção: Em $x = 2$ e em $x = 1$.

  - Se $x = 1$, $f(1) = g(1) = -2$. Ponto de interseção é $(1, -2)$.
  - Se $x = 2$, $f(2) = g(2) = 0$. Ponto de interseção é $(2,0)$.



Questão 06

Resposta: **1365**

Na classe há 15 alunos para fazer uma comissão de 4 alunos.

Como não importa a ordem dos 4 alunos na comissão, este problema resume-se a calcular a quantidade de combinações de 4 alunos de um total de 15 alunos da classe.

$$C_4^{15} = \binom{15}{4} = \frac{15!}{4! \times (15-4)!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 11!}$$

$$C_4^{15} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$C_4^{15} = \frac{32760}{24}$$

$$C_4^{15} = 1365$$

Questão 07

Resposta: **4**

Como o valor médio por pessoa foi R$ 13,50 e havia 10 pessoas, o valor total da conta foi:

$$10 \times R\$13{,}50 = R\$\ 135{,}00$$

Excluindo João e José, os demais amigos (8 no caso) pagaram R$ 99,00. Isto significa que João e José pagaram: R$135,00 – R$ 99,00 = **R$ 36,00**.

Este valor de R$ 36,00 corresponde a 8 coxinhas.

$$\frac{R\$\ 36{,}00}{R\$\ 4{,}50} = 8$$

Como os dois amigos (João e José) comeram a mesma quantidade, cada um comeu 4 coxinhas, ou seja, $\frac{8}{2} = 4$ coxinhas para cada um.

Questão 08

Resposta: **164**

O valor das ações é dado por:

$$V(t) = -t^2 + 16t + 100$$

Note que a função é de segundo grau e o coeficiente do termo quadrático é negativo, portanto, a parábola que representa a função tem concavidade voltada para baixo. Se a concavidade é voltada para baixo, a parábola tem um valor máximo que é dado pelo vértice.

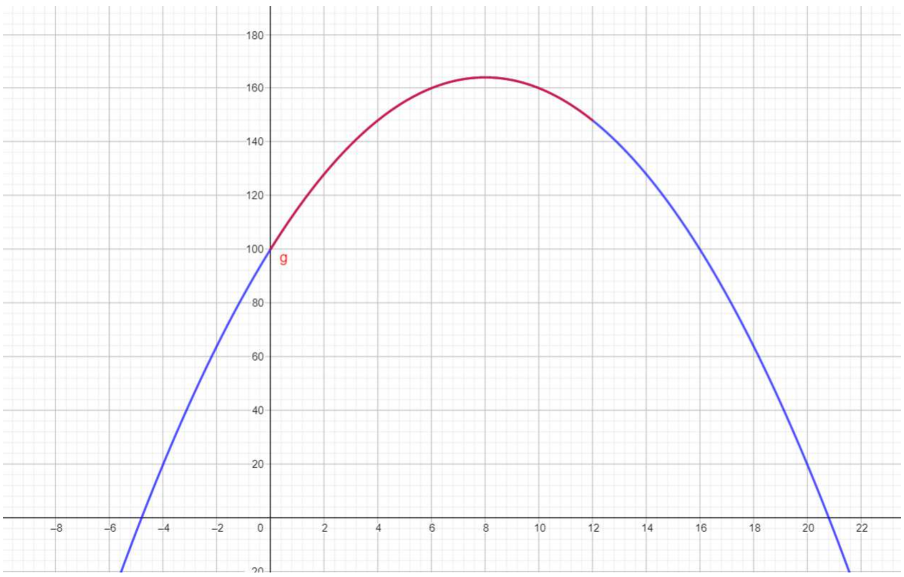
Calculando as coordenadas do vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2(-1)} = 8$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{[16^2 - 4(-1)(100)]}{4(-1)} = -\frac{656}{-4} = 164$$

Como o eixo y, representa o valor da ação, temos que no vértice, o valor da ação é $R\$\ 164{,}00$.

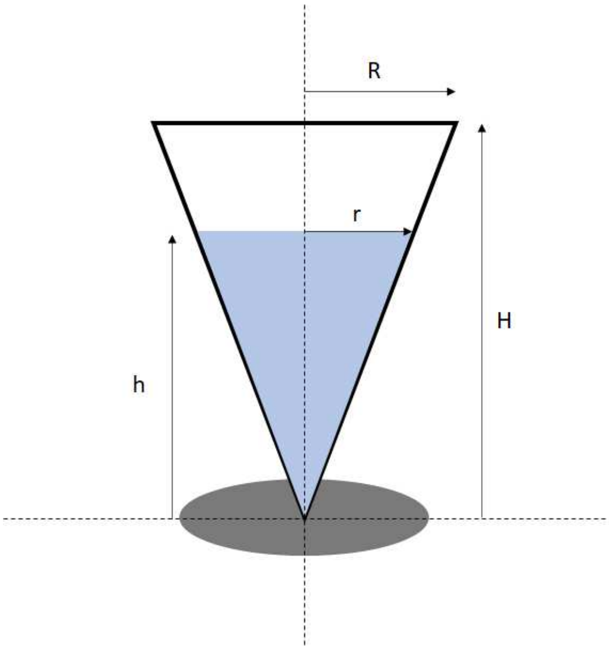
O gráfico abaixo ilustra a função. A curva azul é a parábola completa e a parte vermelha refere-se aos valores de tempo de 0 a 12, que é o intervalo de 1 ano.



Questão 09

Resposta: **700**

Vamos começar pela figura que ilustra o copo com o leite. A parte em azul representa o leite. Devemos lembrar da relação em entre capacidade (ml) e volume (cm^3). Note que $1\ ml = 1\ cm^3$.



Note que o volume do copo é $V = 100\ ml = 100 cm^3$. Se o diâmetro da abertura é $d = 2\sqrt{10}\ cm$, o raio R será $R = \frac{d}{2} = \sqrt{10}\ cm$.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$100 = \frac{1}{3}(3)\left(\sqrt{10}\right)^2 H$$

$$100 = 10H$$

$$H = 10\ cm$$

Note que a altura do copo é $H = 10\ cm$.

Volume de leite: $V_{Leite} = 70\ ml = 70\ cm^3$.

Vamos usar a proporcionalidade dos raios e altura:

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{h}$$

$$r = \left(\frac{R}{H}\right)h$$

$$r = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)h$$

Usando a expressão do volume de leite como o volume de um cone de raio r e altura h, temos:

$$V_{Leite} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$70 = \frac{1}{3}(3)\left[\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)h\right]^2 h$$

$$70 = \frac{10}{100}h^2 h$$

$$70 = \frac{1}{10}h^3$$

$$h^3 = 700$$

Questão 10

Resposta: **(B)**

Vamos avaliar as funções conforme solicitado:

- $f(0) = |0+1| = 1$
- $g(a) = -a^2 + a$
- $g\big(f(0)\big) = g(1) = -(1^2) + a = -1 + a$
- $f\big(g(a)\big) = f(-a^2 + a) = |-a^2 + a + 1|$

Por hipótese, temos que $g\big(f(0)\big) = f\big(g(a)\big)$. Ou seja,

$$-1 + a = |-a^2 + a + 1|$$
$$|-a^2 + a + 1| = a - 1$$

De expressão acima temos que $a - 1 \geq 0 \ \rightarrow a \geq 1$

Resolvendo $|-a^2 + a + 1| = a - 1$, temos:

i) $-a^2 + a + 1 = a - 1$

ii) $-a^2 + a + 1 = -(a - 1)$

De i) temos:

$$-a^2 + a + 1 = a - 1$$

$$-a^2 = a - 1 - a - 1$$

$$-a^2 = -2$$

$$a^2 = 2 \rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

Da resolução acima, apenas a solução $\sqrt{2}$ é compatível com a condição $a \geq 1$.

De ii) temos:

$$-a^2 + a + 1 = -(a - 1)$$

$$-a^2 = -a + 1 - a - 1$$

$$-a^2 = -2a$$

$$a^2 - 2a = 0$$

$$a(a - 2) = 0 \rightarrow a = 0 \ ou \ a = 2$$

Da resolução acima, apenas a solução 2 é compatível com a condição $a \geq 1$.

Portanto, temos $a = \sqrt{2}$ ou $a = 2$, ou seja, ITEM (B).

Questão 11

Resposta: **(A)**

Seja $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ com $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ e tal que $AB = BA$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+y \\ z & z+w \end{bmatrix}$$

$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+y \\ z & z+w \end{bmatrix}$

Temos

$x + z = x \Rightarrow z = 0$

$y + w = x + y \Rightarrow w = x$

Assim: $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$

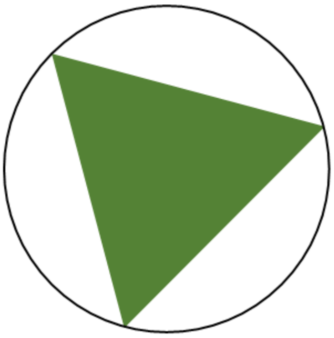
- Note que B não é simétrica, pois $B^T = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & x \end{bmatrix} \neq B$. Isto exclui a letra (D).
- E temos que

$$\det(B) = x^2 \geq 0$$

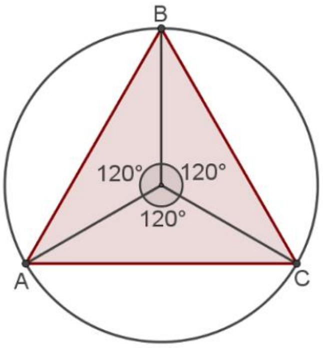
Questão 12

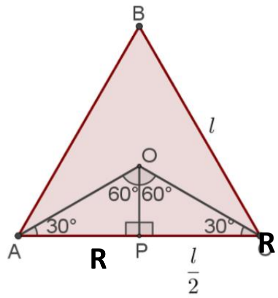
Resposta: **(A)**

Considere a figura:



Para um triângulo equilátero de lado l, inscrito em uma circunferência de raio R, temos que:

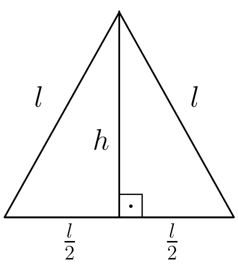




$$\cos 30° = \frac{l/2}{R} = \frac{l}{2R}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2R} \Longrightarrow l = R\sqrt{3}$$

Altura do triângulo equilátero:



$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

$$l^2 = \frac{l^2}{4} + h^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

- Cálculo da área verde: $A_V = \frac{l \times h}{2} = \frac{l \times \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

  Como $l = R\sqrt{3}$, temos:

$$A_V = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

- Cálculo da área branca: $A_B = \pi R^2 - A_V = \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{4}$

Dividindo a área verde pela área branca, temos:

$$\frac{A_V}{A_B} = \frac{\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}}{\frac{4\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}$$

Questão 13

Resposta: **20**

Primeiro deve-se encontrar a função g(x). Como foi dito se tratar de uma reta, a função g(x) é linear, do tipo $g(x) = ax + b$. Temos que g(x) passa pelos pontos $(0{,}20/3)$ e $(4{,}4)$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{20}{3} = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = \dfrac{20}{3} \\ 4 = 4a + b \Rightarrow 4 = 4a + \dfrac{20}{3} \Rightarrow 4a = 4 - \dfrac{20}{3} \Rightarrow a = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Assim, a função g(x) será: $g(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$

Interseção da função g(x) com o eixo x, significa a raiz da função, ou seja,

$$g(x) = 0$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{20}{3} = 0$$

$$-\frac{2}{3}x = -\frac{20}{3}$$

$$x = 10$$

Ponto de interseção da função f(x) com g(x):

$$f(x) = g(x)$$

$$x = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$$

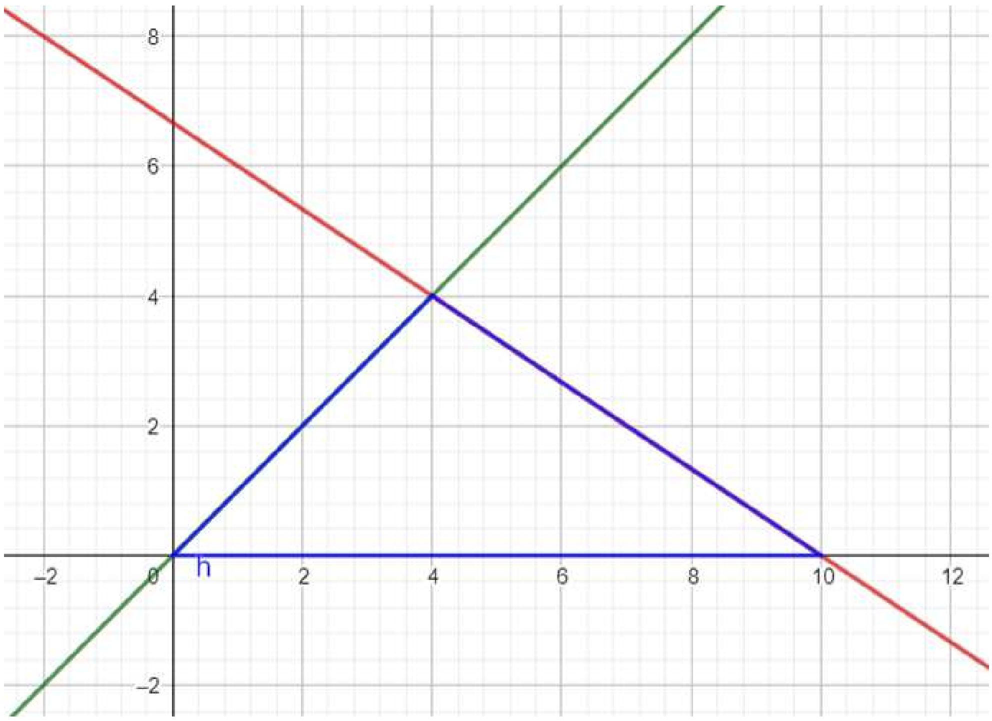
$$x + \frac{2}{3}x = \frac{20}{3}$$

$$\frac{5}{3}x = \frac{20}{3}$$

$$x = 4$$

Temos: $f(4) = g(4) = 4 \Rightarrow$ Ponto de intersecção $(4{,}4)$.

Vamos ver o gráfico das funções e identificar o triângulo:



Note que a base do triângulo vale 10 e a altura vale 4, logo a área será:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$$

Questão 14

Resposta: 2006.

Solução:

$$\begin{aligned} f(1+1) &\underbrace{=}_{f(x+y)=f(x)+f(y)} f(1)+f(1) \\ f(2) &= 1+1 \Rightarrow f(2)=2 \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} f(2+1) &\underbrace{=}_{f(x+y)=f(x)+f(y)} f(2)+f(1) \\ f(3) &= 2+1 \Rightarrow f(3)=3 \end{aligned}$$

Vamos aplicar um processo indutivo. Suponhamos que $f(n)=n$ para $n=k$. Precisamos mostrar que este resultado é válido para $n=k+1$.

Vejamos

$$\begin{aligned} f(k+1) &\underbrace{=}_{f(x+y)=f(x)+f(y)} f(k)+f(1) \\ f(k+1) &= \underbrace{f(k)}_{k}+\underbrace{f(1)}_{1} \quad (f(k)=k \text{ pela hipótese indutiva}) \\ f(k+1) &= k+1 \end{aligned}$$

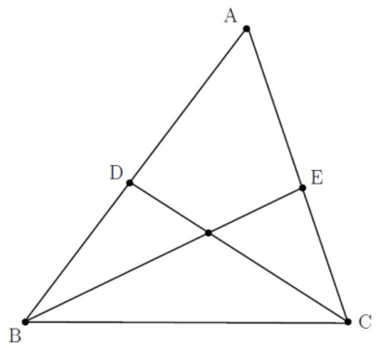
Neste sentido, pelo princípio indutivo aplicado acima, mostramos que $f(n)=n, \forall n \in \mathbb{N}$. Em particular se $n=2006$, teremos que:

$$f(2006)=2006$$

Questão 15

Resposta: **126**

Considere a figura:



Considere os triângulos ABE e ACD. Observem que nesses triângulos temos

$$A\hat{B}E = A\hat{C}D \text{ e } B\hat{A}E = C\hat{A}D$$

Ou seja, temos o caso de semelhança ângulo-ângulo (AA).

Dessa forma temos que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

Se $EC = x$, então $AC = x + 50$.

Logo,

$$\frac{(80 + 30)}{x + 50} = \frac{50}{80}$$

$$\frac{110}{x + 50} = \frac{50}{80}$$

$$110 \cdot 80 = 50 \cdot (x + 50)$$

$$8800 = 50x + 2500$$

$$8800 - 2500 = 50x$$

$$6300 = 50x$$

$$x = 126$$

Questão 16

Resposta: **(C)**

Analisando as funções:

<u>A função $f(x)$:</u>

A função $\boldsymbol{f(x)}$ **é sobrejetora**, pois para qualquer $y \in [1,2]$ existe $x \in [2,3]$ tal que $f(x) = y$.

Graficamente, qualquer reta horizontal $y = b\ com\ y \in [1,2]$ intercepta o gráfico da função pelo menos em um ponto.

A função $\boldsymbol{f(x)}$ **não é injetora**, pois para qualquer $x \in [2,3]\ \ temos\ f(x) = 2$.

Ou seja, $x_1 \neq x_2\ \ \nRightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$. Contra-exemplo: $f(2) = f(3) = 2$.

Graficamente, a reta $y = 2$ intercepta o gráfico da função em infinitos pontos.

Portanto, $\boldsymbol{f(x)}$ **não é bijetora e, portanto, não é inversível.**

<u>A função $g(x)$:</u>

A função $\boldsymbol{g(x)}$ **é sobrejetora**, pois para qualquer $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$tal que $f(x) = y$.

Graficamente, qualquer reta horizontal $y = b\ com\ y \in \mathbb{R}$ intercepta o gráfico da função pelo menos em um ponto.

A função $\boldsymbol{g(x)}$ **não é injetora**, pois existem valores distintos de x com a mesma imagem. Graficamente, exitem valores $b \in \mathbb{R}$ tais que a reta $y = b$ intercepta o gráfico da função em mais de um ponto.

Portanto, $\boldsymbol{g(x)}$ **não é bijetora e, portanto, não é inversível.**

<u>A função h(x):</u>

A função $\boldsymbol{h(x)}$ **é sobrejetora**, pois para qualquer $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in (-1,1)$ tal que $f(x) = y$.

Graficamente, qualquer reta horizontal $y = b\ com\ y \in \mathbb{R}$ intercepta o gráfico da função pelo menos em um ponto.

A função $\boldsymbol{h(x)}$ **é injetora**, pois dados $x_1, x_2 \in (-1,1)$ com $x_1 \neq x_2$ temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Graficamente, para qualquer $b \in \mathbb{R}$ tais que a reta $y = b$ intercepta o gráfico da função em apenas um ponto.
Portanto, $\boldsymbol{h(x)}$ **é bijetora e, portanto, é inversível.**

Analisando as afirmações dadas

I. A função $f(x)$ é inversível. → F
II. A função $g(x)$ é injetora mas não sobrejetora. → F
III. A função $h(x)$ é bijetora. → V
IV. A função $h(x)$ é sobrejetora mas não injetora. → F
V. Nenhuma das funções é inversível. → F

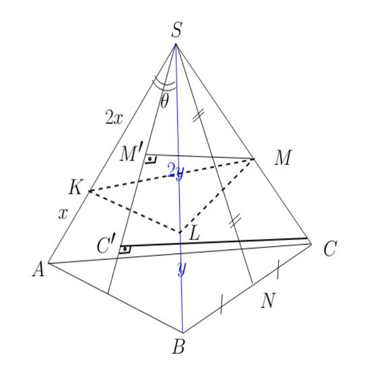
Temos 1 verdadeira ($m = 1$) e 4 falsas ($n = 4$).
Logo, $\boldsymbol{m - n = 1 - 4 = -3.}$

Questão 17

Resposta: 45.

Solução:

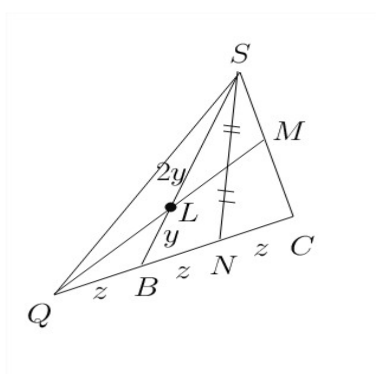
Segue um desenho da situação do problema:



$$V_{MSKL} = \frac{1}{3} M\bar{M}' \cdot \frac{2x \cdot 2y \cdot \text{sen}(\theta)}{2} = \frac{2}{3} xy\text{sen}(\theta) \cdot M\bar{M}'$$

$$V_{CABS} = \frac{1}{3} C\bar{C}' \cdot \frac{3x \cdot 3y \cdot \text{sen}(\theta)}{2} = \frac{3}{2} xy\text{sen}(\theta) \cdot C\bar{C}'$$

Devemos agora encontrar me qual razão M divide a aresta $S\bar{C}$. Observe o desenho da face lateral SBC:



Veja que L é baricentro de ΔSQN. Isto implica que $QB = z$.

Pelo *Teorema de Menelaus* no triângulo ΔSBC temos que:

$$\frac{SM}{MC} \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{LB}{LS} = 1$$

Portanto

$$\frac{SM}{MC} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{SM}{MC} = \frac{2}{3}$$

Retornando ao desenho das pirâmides, nós temos que:

$$\Delta SMM' \text{ é semelhante ao triângulo } \Delta SCC'$$

Isto implica que

$$\frac{MM'}{CC'} = \frac{SM}{SC} = \frac{2}{5}$$

Então,

$$V_{CABS} = \frac{15}{4} xy\text{sen}(\theta)(MM')$$

$$\begin{aligned} \text{Razão entre os volumes} &= \frac{\frac{2}{3}xy\text{sen}(\theta)(MM')}{(\frac{15}{4} - \frac{2}{3})xy\text{sen}(\theta)(MM')} \\ &= \frac{8}{37} \end{aligned}$$

Logo a soma do numerador e do denominador da fração irredutível que representa a razão solicitada é

$8 + 37 = 45$

Questão 18

Resposta: 8586820.

Solução:
Como cada um dos cinco estados envia um grupo de 6 representantes para a conferência, então temos um total de 30 pessoas. Deve-se formar uma comissão de 9 pessoas de modo que devem ser contemplados pelo menos 2 representantes de Nevada.

A estratégia é calcular o total de combinações $C(30,9)$ e subtrair os casos:

(1) n^o de combinações com 0 representantes de nevada $= C(24,9)$

(2) n^o de combinações contendo exatamente 1 representante de nevada$= C(24,8)\cdot C(6,1)$.

Temos que

$$\begin{aligned} C(30,9) &= \frac{30!}{9!\cdot(30-9)!} \\ C(30,9) &= 14307150 \end{aligned}$$

Com respeito aos casos que devem ser subtraídos, temos que:

$$C(24,9) = \frac{24!}{9!(24-9)!} = 1307504$$

$$C(24,8)\cdot C(6,1) = \frac{24!}{8!\cdot(24-8)!}\cdot\frac{6!}{1!\cdot(6-1)!} = 4412826$$

Então o número de combinações de 9 pessoas de modo que devem ser contemplados pelo menos 2 representantes de Nevada é igual a

$$C(30,9)-C(24,9)-C(24,8)\cdot C(6,1) = 14307150-1307504-4412826 = 8586820$$

Questão 19

Resposta: **150**

Neste problema foi dito que a taxa de transmissão teria que reduzir de 2 para 0,5 (reduzir 1,5) em 30 dias. Logo, em 10 dias, teríamos uma redução de 0,5. Note na regra de três abaixo:

$$1{,}5 - - - - - 30$$
$$x - - - - - 10$$
$$30x = 1{,}5 \cdot 10$$
$$30x = 15$$
$$x = 0{,}5$$

Como em 10 dias a taxa de transmissão reduziu 0,5, ela passou a ser 1,5.
Como neste dia havia 100 pessoas contaminas, significa que estas 100 pessoas iriam contaminar 150 novas pessoas ($100 \cdot 1{,}5 = 150$).

Questão 20

Resposta: 144.

Solução:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{3 \cdot 24}{2^{1-1}} \\
S_2 &= \frac{3 \cdot 24}{2^{1-1}} + \frac{3 \cdot 24}{2^{2-1}} \\
S_3 &= \frac{3 \cdot 24}{2^{1-1}} + \frac{3 \cdot 24}{2^{2-1}} + \frac{3 \cdot 24}{2^{3-1}} \\
\vdots \;\; &\vdots \;\; \vdots \\
S_n &= \frac{3 \cdot 24}{2^{1-1}} + \frac{3 \cdot 24}{2^{2-1}} + \frac{3 \cdot 24}{2^{3-1}} + \ldots + \frac{3 \cdot 24}{2^{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} + \frac{3 \cdot 24}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

Dado que o proesso prossegue indefinidamente, temos que:

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} + \frac{3 \cdot 24}{2^{n-1}}$$

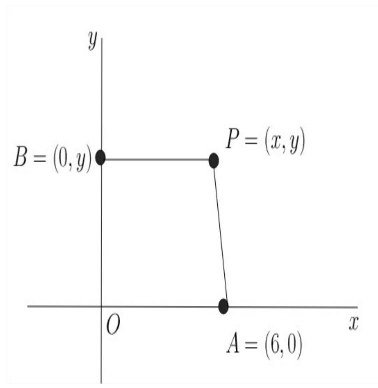
Então,

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} + \frac{72}{2^{n-1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 72 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} \\
&= \frac{72}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{(usando a fórmula de soma de PG infinita)} \\
&= 144
\end{aligned}$$

Questão 21

Resposta: *Alternativa* (e).

Solução:



$$\begin{aligned} d(P,B) &= d(P,A) \\ \sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2} &= \sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2} \\ \sqrt{x^2+0} &= \sqrt{(x-6)^2+y^2} \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos que:

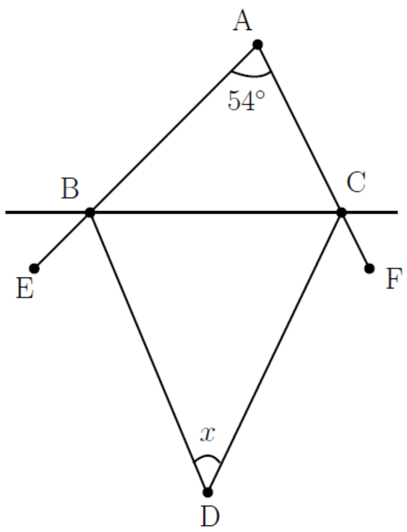
$$(\sqrt{x^2+0})^2 = (\sqrt{(x-6)^2+y^2})^2 \Rightarrow x^2 = (x-6)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 36 + y^2 \Rightarrow y^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow \text{parábola.}$$

Questão 22

Resposta: **63**

Considere a figura:



Como o segmento BD é a bissetriz do ângulo $E\hat{B}C$, temos que:

$$E\hat{B}D = D\hat{B}C = y$$

Da mesma forma, como o segmento CD é a bissetriz do ângulo $F\hat{C}B$, temos:

$$F\hat{C}D = D\hat{C}B = z$$

Assim, teremos que:

(1) $B\hat{C}A = 180° - \ 2z$

(2) $A\hat{B}C = 180° - 2y$

Dessa forma, no triângulo ABC temos:

$$B\hat{A}C + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180°$$

$$54° + (180° - 2y) + (180° - 2z) = 180°$$

$$54° + 180° - 2y + 180° - 2z = 180°$$

$$-2y - 2z = 180° - 180° - 180° - 54°$$

$$-2(y + z) = -234°$$

$$y + z = 117°$$

Por outro lado, no triângulo BCD temos:

$$x + y + z = 180°$$

$$x + (y + z) = 180°$$

$$x + 117° = 180°$$

$$x = 63°$$

Questão 23

Resposta: **(D)**

Resolvendo a equação proposta:

$$A^2 - (a+d)A + (\det A)I = \bar{0}$$

- $A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$
- $(a+d)A = \begin{bmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{bmatrix}$
- $(\det A) = ad - bc$
- $(\det A)I = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$
-

$$A^2 - (a+d)A + (\det A)I = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} a^2+bc-(a^2+ad)+ad-bc & ab+bd-(ab+bd) \\ ac+dc-(ac+dc) & cb+d^2-(ad+d^2)+ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

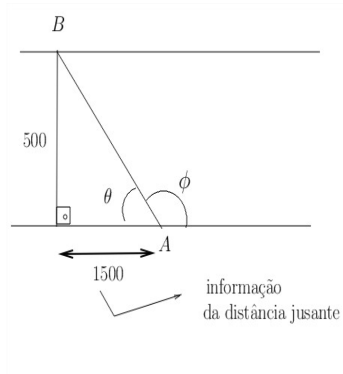
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja, a equação dada é satisfeita para qualquer matriz A.

Questão 24

Resposta: *Alternativa* (e).

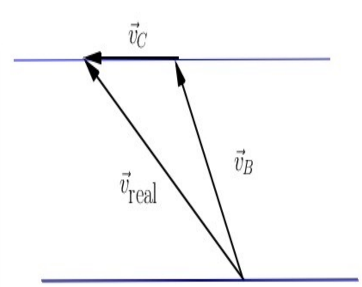
Solução:



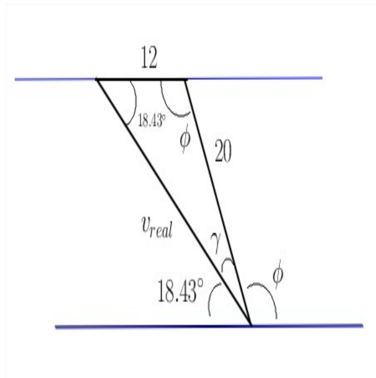
Aplicando a razão trigonométrica tangente no triângulo retântulo de referência extraído da figura acima, temos que:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{500}{1500} \Rightarrow \text{tg}(\theta) = \frac{5}{15} \Rightarrow \theta = \text{arctg}(\frac{5}{15}) = 18.43°$$

Agora vamos analisar o triângulo definido pelos vetores velocidade do problema.



Inserindo as informações dos módulos das velocidades, temos que:



$$\frac{12}{\text{sen}(\gamma)} = \frac{20}{\text{sen}(18.43°)} \Rightarrow \text{sen}(\gamma) = \frac{12 \cdot \text{sen}(18.43°)}{20} \Rightarrow \text{sen}(\gamma) = 0.1896$$

$$\Rightarrow \gamma = \text{arcsen}(0.1896) = 10.93° \Rightarrow \gamma = 10.93°$$

Usando o *teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo*, temos que:

$$18.43° + 10.93° + \phi = 180° \Rightarrow \phi = 150.64° \approx 151°$$

Aplicando novamente a *lei dos senos*, nós temos que:

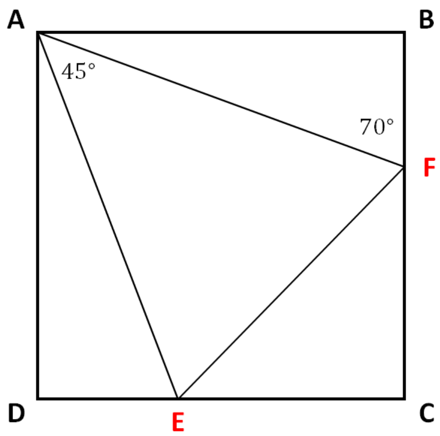
$$\frac{v_{\text{real}}}{\text{sen}(150.64°)} = \frac{20}{\text{sen}(18.43°)}$$

$$\Rightarrow v_{real} = \frac{20 \cdot \text{sen}(150.64°)}{\text{sen}(18.43°)} = 31.01 \frac{\text{km}}{h}$$

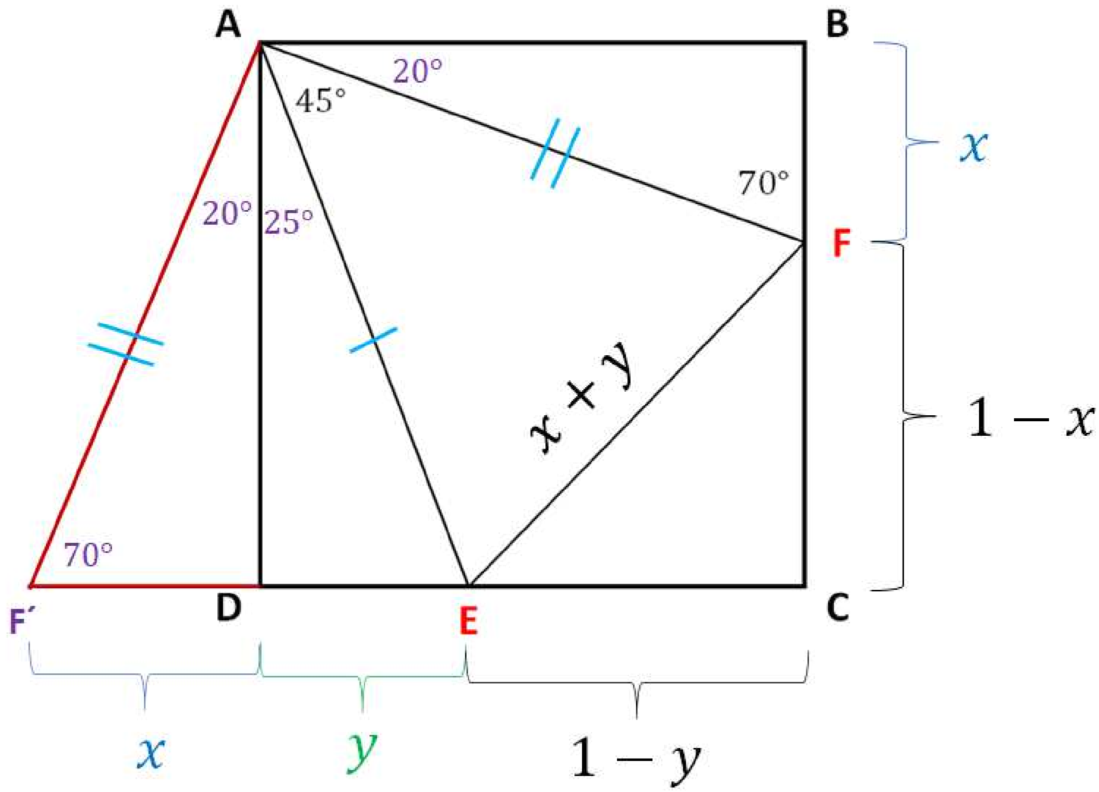
Questão 25

Resposta: **2**

Considere a figura original, lembrando que ABCD é um quadrado de lado 1.



Agora, iremos projetar o triângulo ABF no lado AD. Veja a nova figura:



Quando projetamos o triângulo ABF no lado AD, construímos dois triângulos congruentes (AEF e AEF'). Os lados iguais e comuns estão indicados na figura com os traços (lado AE comum e AF e AF' são iguais). O ângulo de $45°$ é igual nos dois triângulos, com isso, a congruência é por LAL (lado-ângulo-lado).

Note que o triângulo CEF ficou com as medidas em termos de variáveis x e y. Os lados deste triângulo são: $(1-x)$, $(1-y)$ e $(x+y)$. Logo, o perímetro, será:

$$Perímetro = (1-x) + (1-y) + (x+y)$$

$$Perímetro = 1 - x + 1 - y + x + y$$

$$Perímetro = 2$$