Questão 1

Resposta: 18.

Solução:

$$\begin{aligned}\text{altura do degrau} &= \frac{\text{altura total}}{\text{número de degraus}}\\ &= \frac{252}{14}\\ &= 18\end{aligned}$$

Questão 2

Resposta: 6.

Solução:

Se $5b9$ é divisível por 9, então:

$$\begin{aligned}
\underbrace{5b9}_{\text{decompos. base 10}} &= 9 \cdot k, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\
5 \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 9 &= 9k \\
\underbrace{5 \cdot 10^2 + b \cdot 10}_{\text{repres. numeral}} &= 9k - 9 \\
5b0 &= 9(k-1)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 5b0$ é divisível por 9. Logo, b deve ser igual a 4, uma vez que $540 = 9 \cdot 60$. Então $b = 4$

Voltando $b = 4$ na conta de adição, nós temos que:

$$\begin{array}{cccc}
 & 2 & a & 3 \\
+ & 3 & 2 & 6 \\
\hline
 & 5 & 4 & 9
\end{array}$$

$$\Rightarrow a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

Então, $a + b = 6$.

Questão 3

Alternativa: d.

Solução:

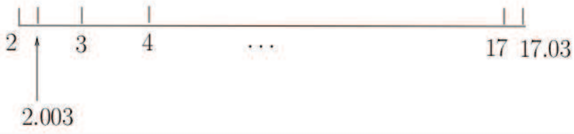
$$\begin{aligned} 20 \times 3 &= (2 \times 10) \times 3 \\ &= 2 \times (10 \times 3) \\ &= 2 \times 30 \Rightarrow 20 \times 3 \text{ é múltiplo de } 2 \end{aligned}$$

Logo, 20×3 é par.

Questão 4

Resposta: 15.

Solução:

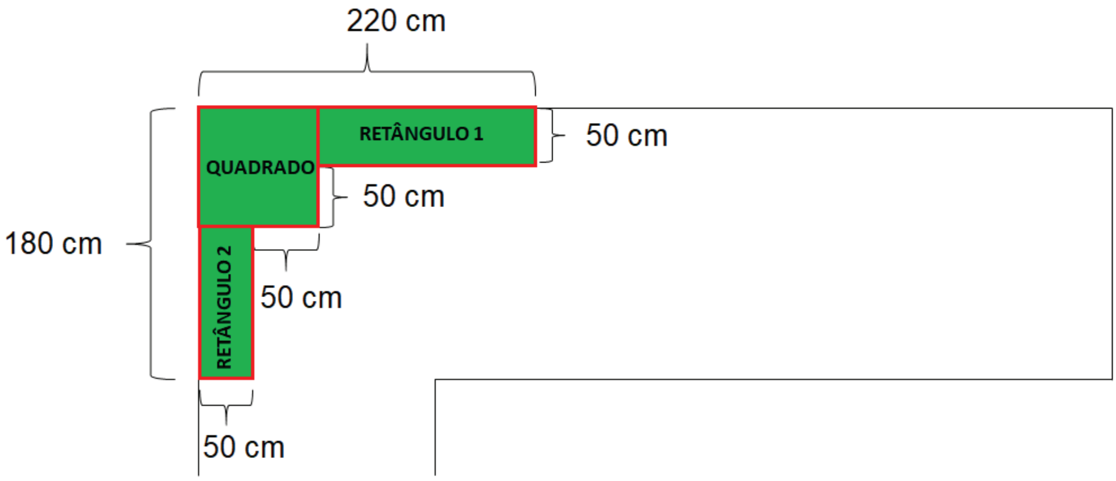


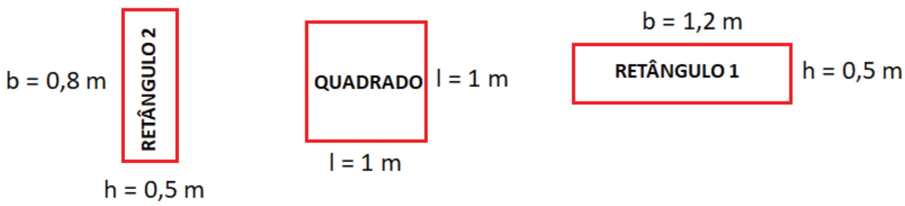
$$17 - 3 + 1 = 15$$

Questão 05

Resposta: **2**

Deve-se notar que a figura verde pode ser decomposta em três figuras geométricas simples: um quadrado e dois retângulos (destacados pela linha vermelha).





A partir das medidas, as áreas são:

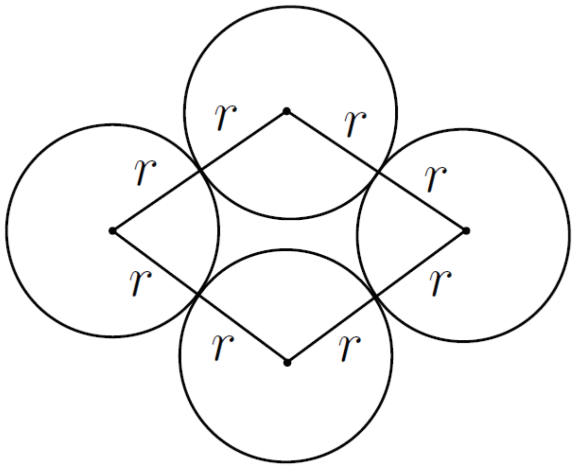
- **Quadrado:** $l = 1\ m$, logo: $A_{quadrado} = 1\ m^2$.
- **Retângulo 1:** $b = 1{,}2\ m$ e $h = 0{,}5\ m$, logo $A_{retângulo\ 1} = 1{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}6\ m^2$.
- **Retângulo 2:** $b = 0{,}8\ m$ e $h = 0{,}5\ m$, logo $A_{retângulo\ 2} = 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}4\ m^2$.

ÁREA TOTAL: $A_{quadrado} + A_{retângulo\ 1} + A_{retângulo\ 2} = 1 + 0{,}6 + 0{,}4 = 2\ m^2$.

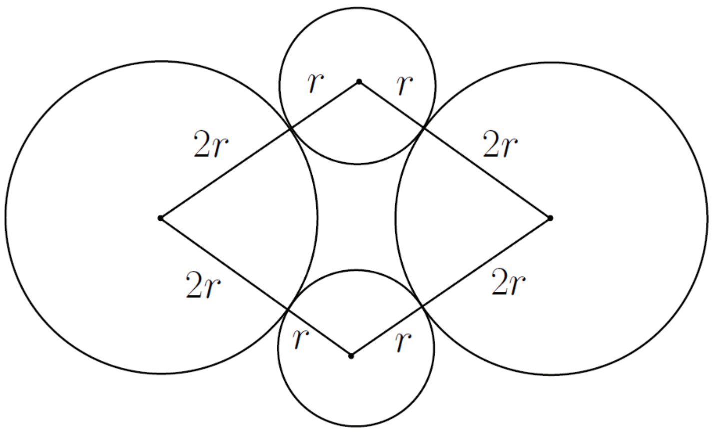
Questão 06

Alternativa: **A**

Na primeira configuração temos:



Portanto, o perímetro da primeira configuração será $\boldsymbol{P_1 = 8\,r}$.
Na segunda configuração temos:



Portanto, o perímetro da primeira configuração será $\boldsymbol{P_2 = 12\,r}$.

Assim, o aumento percentual do perímetro do quadrilátero da segunda figura em relação ao perímetro do quadrilátero da primeira figura foi:

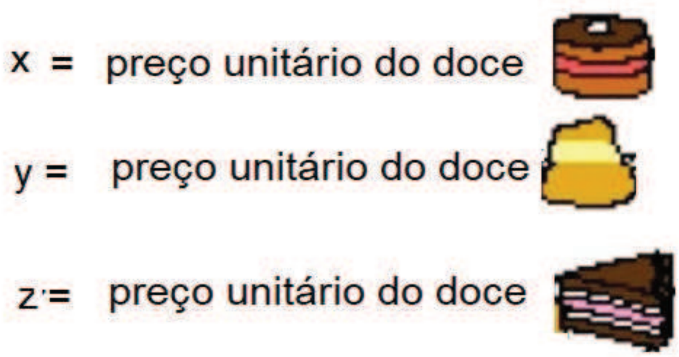
$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} \times 100\ \% = \frac{12r - 8r}{8r} \times 100\ \% = \frac{4r}{8r} \times 100\ \% = 50\ \%$$

Questão 7

Resposta: 20.

Solução:

Definimos:



$$\begin{cases} 2x + y &= 8 \\ x + y + z &= 9 \\ 2x + 2y &= 10 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação e a terceira, temos que:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ &- \\ 2x + 2y &= 10 \end{aligned}$$

Temos que:

$$-y = -2 \Rightarrow y = 2$$

Voltando $y = 2$ na primeira equação, temos que:

$$2x + 2 = 8$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

Voltando $x = 3$ e $y = 2$ na segunda equação, nós temos que:

$$3 + 2 + z = 9 \Rightarrow z = 4$$

Então, a porção abaixo terá o seguinte custo:

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 = 20$$

Questão 8

Resposta: a.

Solução:
Consideramos:

N = número de fileiras a_N = número de assentos na N-ésima fileira

Temos que: $a_1 = 28$ e $a_N = a_1 + (N-1)4$. Para $N = 20$, temos que:

$$a_{20} = 28 + (20-1) \cdot 4 \quad a_{20} = 104$$

Sabendo que a soma dos termos de uma *progressão aritmética* é dada por $S_N = \frac{(a_1 + a_N) \cdot N}{2}$. Então,

$$S_{20} = = \frac{(28+104) \cdot 20}{2}$$

$$S_{20} = 1320 \text{ assentos}$$

Questão 09

Resposta: 49.

Solução:

5	y	z	38	x

$$\begin{cases} y & = & \dfrac{5+z}{2} \longrightarrow 2y - z = 5 \\ 38 & = & \dfrac{z+x}{2} \longrightarrow x + z = 76 \\ z & = & \dfrac{y+38}{2} \longrightarrow -y + 2z = 38 \end{cases}$$

Temos que:

5	y	z	38	x

Então $y = 16$.
Voltando $y = 16$ na primeira equação, nós temos que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 16 - z &= 5 \\ z &= 32 - 5 \\ z &= 27 \end{aligned}$$

Voltando $z = 27$ na segunda equação, nós temos que:

$$\begin{aligned} x + 27 &= 76 \\ x &= 76 - 27 \\ x &= 49 \end{aligned}$$

Questão 10

Alternativa: **E**

Note que:

$g(8) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

Logo,

$f(g(8)) = f(3)$

$3 = 3 \cdot 3 - k$

$k = 9 - 3$

$k = 6$

Então, temos que $f(x) = 3x - 6$.

Uma vez determinado o valor de k, aplicamos:

$f(5) = 3 \cdot 5 - 6 = 15 - 6 = 9$

$$\boldsymbol{g(f(5)) = g(9) = \log_2 9 = \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 2} = \frac{2 \cdot \log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{2 \cdot 0,48}{0,3} = 3,2}$$

Questão 11

Alternativa: **A**

Foi dado: $1 - \operatorname{sen}^2\theta = 0{,}25$ e que θ pertence ao segundo quadrante do círculo trigonométrico. Com a informação do quadrante, sabe-se que o $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$. Analisando as alternativas:

(A) $\cos\theta = 0{,}5$. **INCORRETO.**

$$1 - \operatorname{sen}^2\theta = 0{,}25$$

$$\cos^2\theta = 0{,}25$$

$$\cos\theta = \pm\, 0{,}5$$

Por ser do segundo quadrante, temos que a opção correta seria:

$$\cos\theta = -0{,}5$$

(B) $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$. **CORRETO.**

$$1 - \operatorname{sen}^2\theta = 0{,}25$$

$$-\operatorname{sen}^2\theta = 0{,}25 - 1$$

$$-\operatorname{sen}^2\theta = -0{,}75$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = 0{,}75 = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por ser do segundo quadrante, temos que a opção correta seria:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(C) $\theta = 120°$. **CORRETO.**

Usando a função inversa do seno ($\operatorname{arcsen}\theta = \sin^{-1}\theta$), chegamos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\theta) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\theta = 60° \text{ ou } \theta = 120°$$

Por ser do segundo quadrante precisa ser o valor $120°$.

(D) $\tan\theta = -\sqrt{3}$. **CORRETO.**

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$$

(D) $\cos^2\theta = 1/4$. **CORRETO.**

$$1 - \operatorname{sen}^2\theta = 0{,}25$$

$$\cos^2\theta = 1/4$$

Questão 12

Resposta: **2**

Dada as informações do problema, temos os seguintes valores:

- Pagamento antecipado à vista: R$ 24.480,00.
- Pagamento mensal de R$ 1.700,00, chega-se num montante em 18 meses de 18 x R$ 1.700,00 = R$ 30.600,00
- Pagamento integral no fim do prazo: R$ 38.250,00.

Analisando os itens:

(I) **VERDADEIRO.**
20% de R$ 30.600,00 = R$ 6.120,00.
Logo, R$ 30.600,00 – R$ 6.120,00 = R$ 24.480,00

(II) **FALSO.**
Calculando o aumento para o montante pago no fim do prazo:
R$ 38.250,00 – R$ 30.600,00 = R$ 7.650,00
R$ 7.650,00 / R$ 30.600,00 = 0,25 = 25 %.

O aumento é de 25% e não de 20%.

(IiI) **FALSO.**
Calculando o aumento para o montante pago com parcelas mensais chega-se no valor de R$ 30.600,00 e não R$ 20.400,00.

(IV) **VERDADEIRO.**
Calculando o aumento para o montante pago no fim do prazo em relação ao pagamento à vista antecipado:
R$ 38.250,00 – R$ 24.480,00 = R$ 13.770,00
R$ 13.770,00 / R$ 24.480,00 = 0,5625 = 56,25 %.

Logo, o total de assertivas **FALSAS** são **2**.

Questão 13

Resposta: **3**

Para encontrar os pontos de interseção, precisamos igualar as funções f e g.

$$f(x) = g(x)$$
$$x + 1 = -x^2 + 2x + 3$$
$$x^2 - 2x - 3 + x + 1 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Raízes:

$$x_1 = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Note que

$$g(2) = -(2^2) + 2 \cdot 2 + 3 = -4 + 4 + 3 = 3$$
$$g(-1) = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$$

$f(2) = 2 + 1 = 3 = g(2)$ Como esperado, por ser ponto de interseção.

$f(-1) = -1 + 1 = 0 = g(-1)$ Como esperado, por ser ponto de interseção.

Logo, as coordenadas y dos pontos de interseção são 3 e 0, logo a soma dá 3.

Questão 14

Resposta: **0**

Primeiro é necessário calcular a matriz inversa de A. Para isto usamos:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Onde I é a matriz identidade.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que chegaremos em 4 equações:

$$2a + 3c = 1$$

$$2b + 3d = 0$$

$$-a = 0$$

$$-b = 1$$

Com isso:

$$a = 0$$

$$b = -1$$

$$c = \frac{1}{3}$$

$$d = \frac{2}{3}$$

Logo,

$$x = a - b + 3c - 3d$$

$$x = 0 - (-1) + 3\left(\frac{1}{3}\right) - 3\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$x = 0 + 1 + 1 - 2$$

$$x = 0$$

$$\boldsymbol{x^2 = 0^2 = 0}$$

Questão 15

Alternativa: **E**

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 14 \\ x + 5y = -19 \end{cases}$$

Analisando as afirmações:

I. **FALSA**.

$2(4) - 3(-2) = 8 + 6 = 14$

$1(4) + 5(-2) = 4 - 10 = -6 \neq -19$

II. **FALSA**.

$1(1) + 5(4) = 1 + 20 = 21 \neq -19$

III. **VERDADEIRA**.

Resolvendo o sistema:

Isolando x na segunda equação:

$x = -19 - 5y$

Substituindo x na primeira equação e resolvendo para y:

$$2x - 3y = 14$$

$$2(-19 - 5y) - 3y = 14$$

$$-38 - 10y - 3y = 14$$

$$-13y = 14 + 38$$

$$-13y = 52$$

$$y = -4$$

Voltando o valor de y, na segunda equação com x isolado:

$$x = -19 - 5y$$

$$x = -19 - 5(-4)$$

$$x = -19 + 20$$

$$x = 1$$

Logo: $\boldsymbol{x + y = 1 + (-4) = -3.}$

Questão 16

Alternativa: **C**

Começando por:

$$\log b^3 = 6$$

$$3 \log b = 6$$

$$\log b = \frac{6}{3}$$

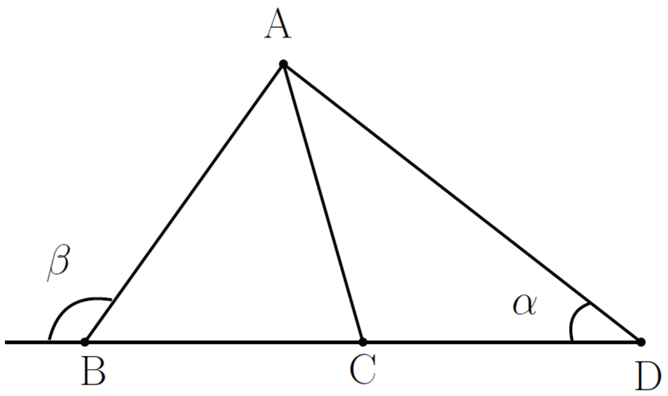
$$\log b = 2$$

Voltando no cálculo do valor de x:

$$x = 4^{\log b} = 4^2 = 16$$

Questão 17

Alternativa: **C**



Como AC e CD são congruentes, temos que o triângulo ACD é isósceles e $D\hat{A}C = \alpha$.

Note que $B\hat{C}A$ é um ângulo externo ao triângulo ACD, assim:

$B\hat{C}A = D\hat{A}C + A\hat{D}C = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

Como BC e AC são congruentes, temos que o triângulo ABC é isósceles e então:

$C\hat{B}A = C\hat{A}B = x$

Logo, teremos que:

$$C\hat{B}A + C\hat{A}B + B\hat{C}A = 180°$$

$$x + x + 2\alpha = 180°$$

$$2x + 2\,\alpha = 180°$$

$$2(x + \alpha) = 180°$$

$$x + \alpha = 90°$$

$$x = 90° - \alpha$$

Então,

$$\beta + C\hat{B}A = 180°$$

$$\beta + x = 180°$$

$$\beta + (90° - \alpha) = 180°$$

$$\beta + 90° - \alpha = 180°$$

$$\beta = 180° - 90° + \alpha$$

$$\beta = 90° + \alpha$$

Questão 18

Alternativa: **B**

O recipiente tem um formato hemisférico, logo seu volume (V_r) é igual a metade do volume de uma esfera (V_e).

$$V_r = \frac{1}{2}V_e = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi(15)^3 \cong 7069\ cm^3$$

Como o vinho ocupa 2/3 do volume total do recipiente, temos que o volume de vinho (V_V) será:

$$V_V = \frac{2}{3}V_r = \frac{2}{3}(7069) \cong 4713\ cm^3$$

O volume de cada taça (V_T), que tem formato cônico, será:

$$V_T = \frac{1}{3}(\pi r^2 h) = \frac{1}{3}(\pi \cdot 4^2 \cdot 10) \cong 168\ cm^3$$

Logo, o número de taças (N) que serão preenchidas é dado por:

$$N = \frac{V_V}{V_T} = \frac{4713}{168} = 28{,}05$$

Então, o número de taças completamente preenchidas é **28**.

Questão 19

Resposta: **60**

O problema poderia ser pensado de duas maneiras diferentes para ser resolvido:

Opção 1: Contar o total de pratos e excluir os que não têm Bife acebolado e nem Couve.
Total de pratos: PRATO PRINCIPAL x CARNE x SALADA x GUARNIÇÃO

$$Total = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 96\, pratos$$

Pratos sem Bife acebolado e Couve

$$Pratos\ Sem\ Bife\ e\ Couve = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 36\, pratos$$

Logo, o total seria: $\mathbf{96 - 36 = 60}$.

Opção 2: Contar o número de pratos com Bife acebolado, contar o número de pratos com Couve, somar os dois e excluir a interseção dos pratos com Bife acebolado e Couve (pois a interseção é contabilizada duas vezes – pratos com couve e os pratos com bife acebolado).

$$Pratos\ com\ Bife\ acebolado = 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 24\, pratos$$

$$Pratos\ com\ Couve = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 48\, pratos$$

$$Pratos\ com\ Bife\ acebolado\ e\ Couve = 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 12\, pratos$$

Logo, o total seria: $\mathbf{24 + 48 - 12 = 60}$.

Questão 20

Alternativa: c.

Solução:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 2 \cdot 0.01 \\ a_2 & = & 2 \cdot (2 \cdot 0.01) \\ a_3 & = & 2^3 \cdot 0.01 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_n & = & 2^n \cdot 0.01 \end{array}$$

Então, após 20 passos, temos que:

$$\begin{array}{rcl} a_{20} & = & 2^{20} \cdot 0.01 \\ & \approx & 10485 \end{array}$$

Se a espessura final deve ser de pelo menos 50 polegadas, então isto implica que:

$$\begin{array}{rcl} a_n & \geq & \text{Ln}\,(50) \\ 2^n \cdot 0.01 & \geq & 50 \\ 2^n & \geq & \dfrac{50}{0.01} \end{array}$$

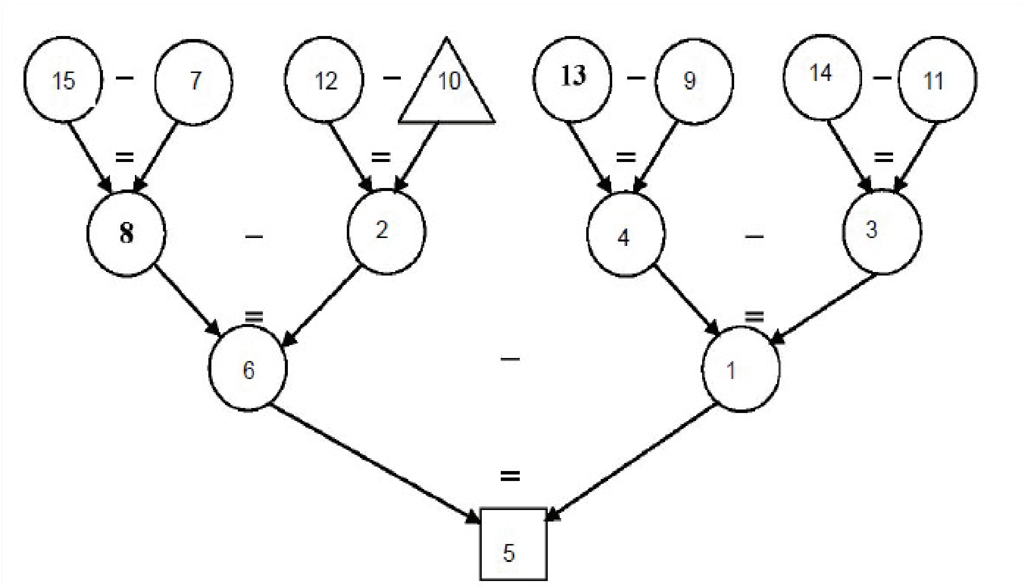
Aplicando o Ln a ambos os membros da desigualdade, temos que:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ln}(2^n) & \geq & \text{Ln}\left(\dfrac{50}{0.01}\right) \\ n\text{Ln}(2) & \geq & \text{Ln}\left(\dfrac{50}{0.01}\right) \\ n & \geq & \dfrac{\text{Ln}\left(\dfrac{50}{0.01}\right)}{\text{Ln}(2)} \\ n & \geq & 12.28 \Rightarrow n = 13 \text{ passos} \end{array}$$

Questão 21

Resposta: 15.

Solução:



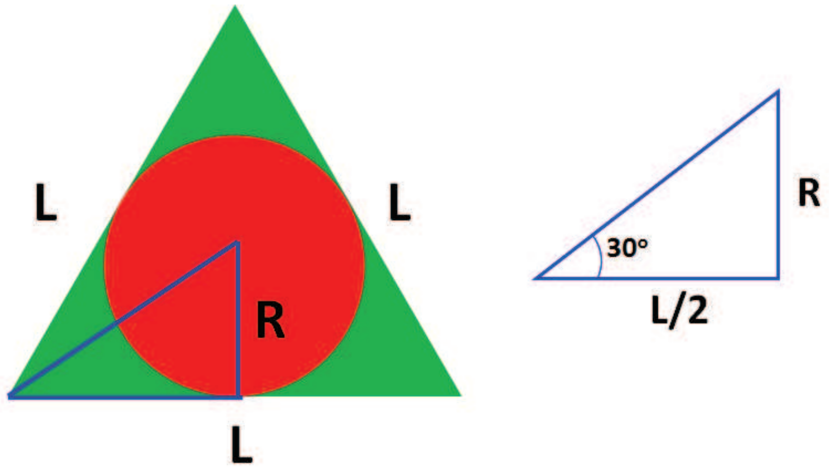
A soma do número que está no triângulo com o número que está no quadrado é dada por:

$$10 + 5 = 15$$

Questão 22

Alternativa: **A**

Veja a figura da questão, com a marcação do raio e do lado do triângulo.



Começando por estabelecer a relação entre R e L.

$$\tan 30° = \frac{R}{L/2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2R}{L}$$

$$L = \frac{6R}{\sqrt{3}}$$

$$L = 2\sqrt{3}\,R \text{ (após racionalizar)}$$

Cálculo da área vermelha (AVM):

$$AVM = \pi R^2$$

Cálculo da área verde (AVD), será dada pela área do triângulo equilátero menos a área vermelha.

$$AVD = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} - \pi R^2 = \frac{\left(2\sqrt{3}R\right)^2\sqrt{3}}{4} - \pi R^2 = \frac{12\sqrt{3}R^2}{4} - \pi R^2 = 3\sqrt{3}R^2 - \pi R^2$$

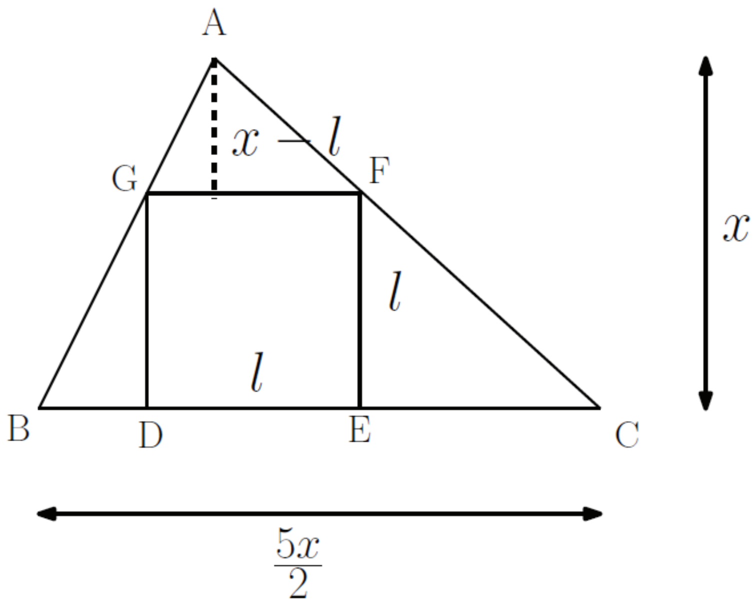
Fazendo a razão entre as áreas verde e vermelha:

$$\frac{AVD}{AVM} = \frac{3\sqrt{3}R^2 - \pi R^2}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{\pi R^2} - \frac{\pi R^2}{\pi R^2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1}$$

Questão 23

Alternativa: **A**

Veja a figura da questão, com algumas marcações especiais.



Observe que os triângulos AGF e ABC são semelhantes. Assim,

$$\frac{x-l}{x} = \frac{l}{5x/2}$$

$$\frac{5x}{2}(x-l) = lx$$

$$5x^2 - 5lx = 2lx$$

$$5x^2 = 2lx + 5lx$$

$$5x^2 = 7lx$$

$$l = \frac{5x^2}{7x}$$

$$l = \frac{5x}{7}$$

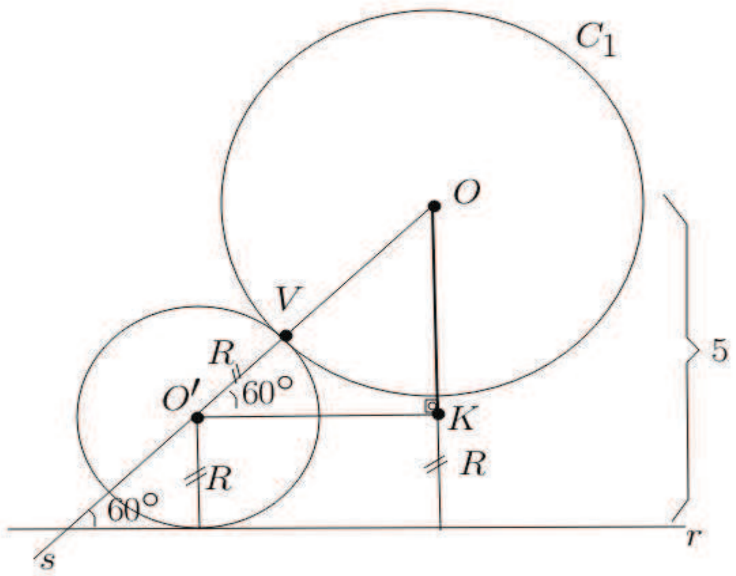
A área do quadrado DEFG será:

$$A = l^2 = \left(\frac{5x}{7}\right)^2 = \frac{25x^2}{49}$$

Questão 24

Alternativa: d.

Solução:



$OO^0 = OV + O^0V$ $OO^0 =$
$3 + R$

No triângulo ΔOO^0K, temos que:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\text{sen}(60^\circ)} &= \frac{5-R}{3+R} \\
\frac{3}{2} &= \frac{5-R}{3+R}
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
(3+R)\sqrt{3} &= 2(5-R) \\
3+\sqrt{3}+R\sqrt{3} &= 10-2R \\
R\sqrt{3}+2R &= 10-3\sqrt{3} \\
R(\sqrt{3}+2) &= 10-3\sqrt{3} \\
R &= \frac{10-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}
\end{aligned}
$$

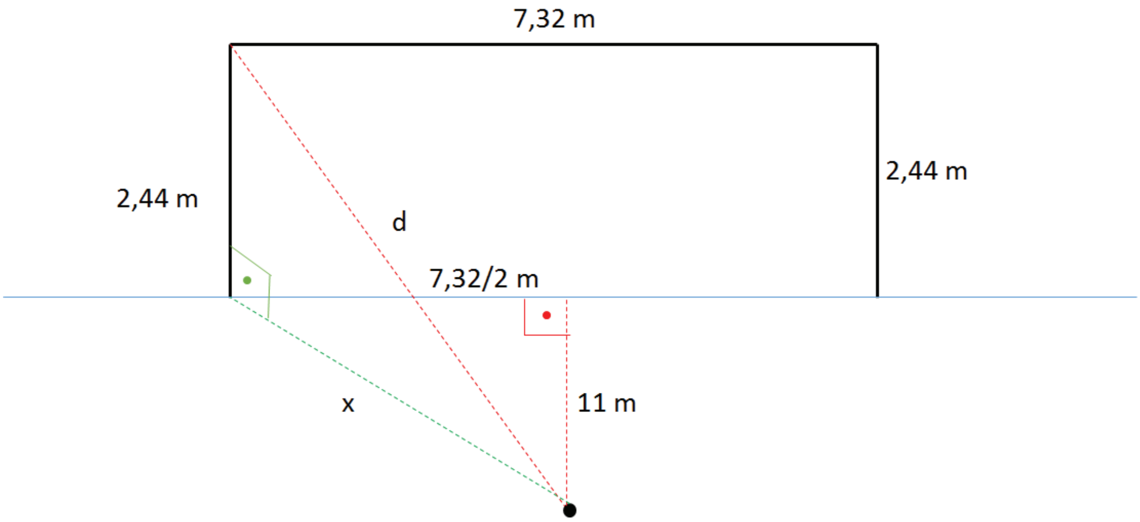
Então,

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{(10-3\sqrt{3})^{\times 2-\sqrt{3}}}{(2+\sqrt{3})^{\times 2-\sqrt{3}}} \\
R &= \frac{(10-3\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} \\
R &= \frac{20-10\sqrt{3}-6\sqrt{3}+9}{1} \\
R &= 29-16\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Questão 25

Alternativa: **D**

Veja a figura da questão, com algumas marcações especiais das retas auxiliares e ângulos ortogonais.



Note primeiramente que, o valor de x^2, será dado por:

$$x^2 = (7{,}32/2)^2 + 11^2$$

$$x^2 = (3{,}66)^2 + 121$$

$$x^2 = 134{,}3956$$

Agora calculando a distância d que a bola percorreu ao cobrar o pênalti,

$$d^2 = (2{,}44)^2 + x^2$$

$$d^2 = 5{,}9536 + 134{,}3956$$

$$d^2 = 140{,}3492$$

$$d \cong 11{,}85\ m$$