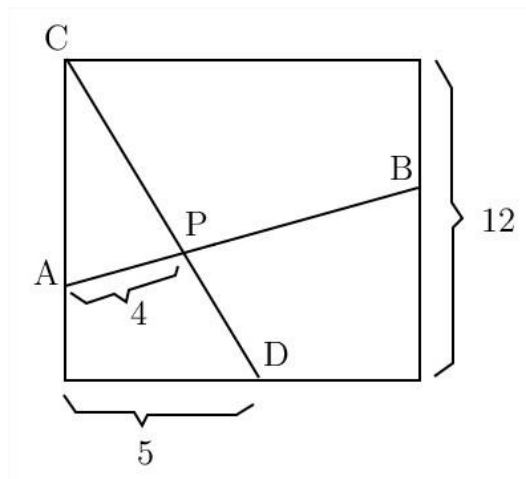


Prova – Segunda Fase Nível A 2013

1.) Considere o quadrado exibido na figura abaixo:



O segmento AB é perpendicular ao segmento CD.

Calcule o comprimento de PB.

2.) O lado de um quadrado mede 16 cm. Um segundo quadrado é inscrito, a partir da união segmentos que ligam os pontos médios dos lados, sucessivamente. No segundo quadrado, nós repetimos o processo, inscrevendo um terceiro quadrado. Este processo continua indefinidamente.



Determine a soma das áreas dos 7 primeiros quadrados inscritos.

3.) Se o número 6 for escrito à direita de um número de dois dígitos, então o valor desse número aumenta de 636. Qual é a soma dos algarismos desse número?

4.) Determine o maior valor possível para a soma $x+y$, onde (x,y) diz respeito a todos os pares de inteiros (x,y) que satisfazem a equação

$$2 + xy + 2x + y = 155$$

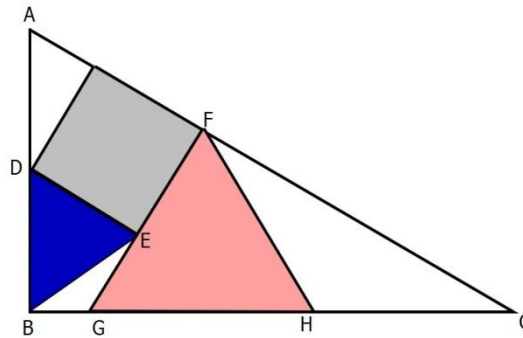
5.) O menor inteiro de um conjunto de inteiros consecutivos é -25. Se a soma desses inteiros é 26, determine quantos inteiros estão neste conjunto.

6.) Um hotel de uma cidade do interior acomoda no máximo 50 hóspedes. Se em acomodação por dia, cada hóspede gasta 40 reais e tendo em vista que 40% dos hóspedes do hotel utilizam o serviço de restaurante do hotel, que custa 10 reais por pessoa. Determine:

- (I) Se 15 hóspedes gastam somente com acomodação, pelo menos quantos hóspedes devem usar o serviço de restaurante para que a receita do hotel supere 2000 reais?
- (II) Qual o número mínimo de hóspedes que o hotel deverá abrigar para ter receita de no mínimo 1000 reais?

Preencha na lacuna o valor da soma do resultado obtido em (I) com o resultado obtido em (II)

7.) O triângulo isóceles DBE, o triângulo equilátero FGH e um quadrado pertencem ao interior de um triângulo retângulo ABC, são tangentes uns aos outros e ao triângulo ABC, conforme a figura abaixo. Suponha que $AB=1\text{cm}$.



- (I) Calcule a área do quadrado
- (II) Calcule a área do triângulo equilátero

Seja a o resultado obtido em (I) e seja b o resultado obtido em (II). Preencha na lacuna o resultado (inteiro) da seguinte conta:

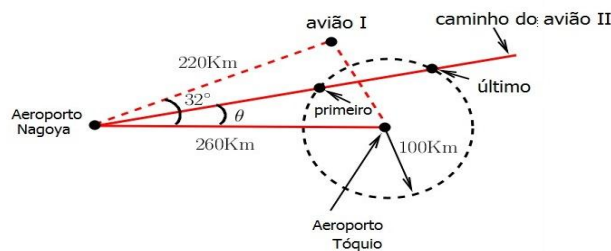
$$a + 12b$$

8.) Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x - a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Determine o valor positivo de a para que o sistema admita três soluções.

9.) O aeroporto de Nagoya e o Aeroporto de Tóquio estão à 260 km de distância. Os controladores de tráfego aéreo no aeroporto de Tokio devem monitorar os aviões dentro de um raio de 100 km do aeroporto.



(I) O avião I está a 220 km do Aeroporto de Nagoya em um ângulo de 32° com a linha reta entre os aeroportos. Qual é a distância do avião I até o aeroporto de Tóquio? O avião 1 está realmente fora do alcance dos controladores do aeroporto de Tokio, como sugerido pela Figura?

(II) O avião II vai decolar do aeroporto de Nagoya e vai passar pelo aeroporto de Tóquio. Sua trajetória irá fazer um ângulo θ com a reta entre os aeroportos. Se $\theta = 15^\circ$, qual será a distância do avião II ao aeroporto de Nagoya, quando ele passar pela primeira vez pela região de alcance dos controladores de tráfego aéreo de Tóquio? Qual será a distância do avião II ao aeroporto de Nagoya, quando ele deixar o último limite da região de alcance dos controladores de tráfego aéreo?

(III) Qual é o ângulo θ para o qual o avião II fica nos limites de alcance dos controladores de tráfego aéreo de Tóquio em apenas um ponto?

- (a) (I) 137.77 km, fora do alcance; (II) $x=177.17$ ou 325.11 km; (III) $\theta \approx 22.6^\circ$
- (b) (I) 137.77 km, fora do alcance; (II) $x=177.17$ ou 300.11 km; (III) $\theta \approx 29.6^\circ$
- (c) (I) 117.77 km, fora do alcance; (II) $x=177.17$ ou 300.11 km; (III) $\theta \approx 22.6^\circ$
- (d) (I) 117.77 km, fora do alcance; (II) $x=177.17$ ou 325.11 km; (III) $\theta \approx 29.6^\circ$
- (e) (I) 117.77 km, fora do alcance; (II) $x=177.17$ ou 225.11 km; (III) $\theta \approx 29.6^\circ$

10.) Um retângulo de lados inteiros m, n é dividido em quadrados de lado 1. Se um feixe de luz incide no retângulo por um dos vértices na direção da bissetriz do ângulo reto e é refletido sucessivamente nos lados do retângulo, determine quantos quadrados são atravessados pelo feixe de luz se $m=80$ e $n=60$.