

### Questão 01

Resposta: **14**

Como  $x$ ,  $y$  e  $z$  são números inteiros positivos, é necessário que:

$$2x = 6y = 9z = n$$

com  $n$  igual a um número inteiro que, ao dividir 2, 6 ou 9, resulte em número inteiro.

Note que o menor  $n$  seria aquele que é o *MMC* de 2, 6 e 9, neste caso:

$$MMC(2,6,9) = 18$$

Se  $n = 18$ , então:

$$2x = 18 \rightarrow x = 9$$

$$6y = 18 \rightarrow y = 3$$

$$9z = 18 \rightarrow z = 2$$

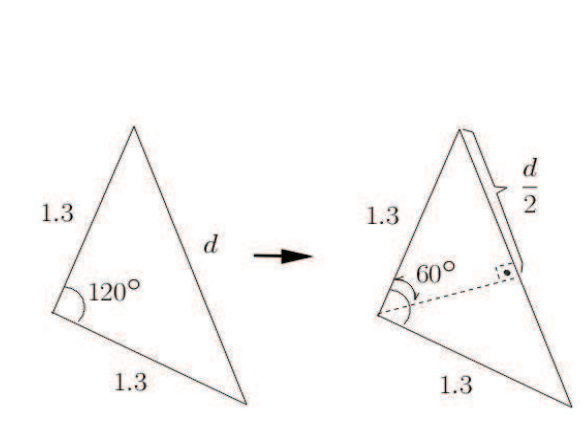
Logo, o menor valor para  $x + y + z$  é:

$$x + y + z = 9 + 3 + 2 = 14$$

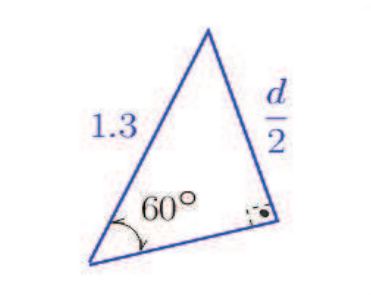
**Questão 2**

**Resposta:** 607.

*Solução:*



Aplicando uma trigonometria no triângulo azul, extraído da figura da situação acima, temos que:



$$\underbrace{\text{sen}(60^\circ)} = \frac{\frac{d}{2}}{1.3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{2.6}$$

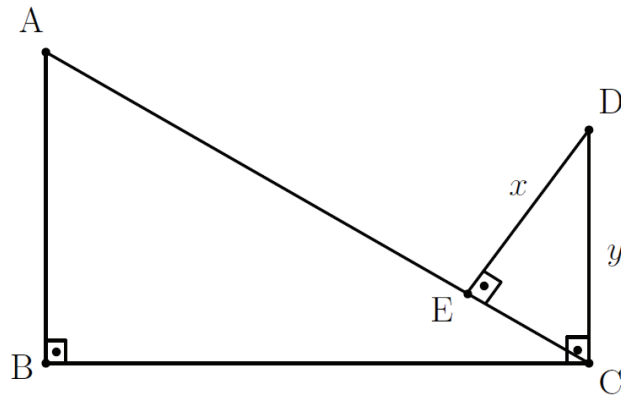
Isto implica que:

$$\begin{aligned}d &= \frac{\sqrt{3} \cdot 2.6}{2} \\ \Rightarrow d^2 &= \left( \frac{\sqrt{3} \cdot 2.6}{2} \right)^2 \\ d^2 &= \frac{(\sqrt{3})^2 \cdot (2.6)^2}{2^2} \\ d^2 &= \frac{3 \cdot 6.76}{4} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{676}{100} \\ &= \frac{2028 \div 4}{400 \div 4} \\ &= \frac{507}{100}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{507}{100} \Rightarrow a + b = 507 + 100 \Rightarrow a + b = 607$$

### Questão 03

Resposta: **16**



Seja  $\widehat{BCA} = \alpha$ . Assim,  $\widehat{BAC} = 90^\circ - \alpha$ . Como  $\widehat{BCA}$  e  $\widehat{ECD}$  são complementares, teremos que  $\widehat{ECD} = 90^\circ - \alpha$ , e portanto  $\widehat{CDE} = \alpha$ . Concluimos então que ABC e CED são semelhantes. Dessa forma, por semelhança de triângulos teremos que:

$$\frac{AB}{EC} = \frac{BC}{x} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{15}{x} \rightarrow x = \frac{15}{2}$$

e

$$\frac{AC}{y} = \frac{AB}{EC} \rightarrow \frac{AC}{y} = \frac{8}{4} \rightarrow y = \frac{AC}{2}.$$

Como ABC é um triângulo retângulo, teremos que

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 \rightarrow AC = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$$

Assim,

$$y = \frac{17}{2}$$

Logo,

$$x + y = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

## Questão 04

### Alternativa: C

Analisando as assertivas:

#### I. FALSA.

Note que  $f(x) = 1 - x$  para  $x \leq 0$ .

Logo,  $f(0) = 1 - 0 = 1$ , ou seja, existe o valor  $f(0)$ .

#### II. VERDADEIRA.

Se  $x \leq 0$ , então  $f(x) = 1 - x$  pela definição. Os pontos de interseção satisfazem  $f(x) = g(x)$ . Logo,

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\1 - x &= x^2 \\x^2 + x - 1 &= 0 \\x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \\x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Note que nesta solução,  $x_1 > 0$  e  $x_2 < 0$ . Como o  $f(x)$  utilizado só vale para  $x \leq 0$ , há apenas um ponto de interseção que corresponde ao  $x_2$ .

#### III. FALSA.

$$f(g(-1)) = f((-1)^2) = f(1) = 1$$

$$g(f(-1)) = g(1 - (-1)) = g(2) = 2^2 = 4$$

Logo,  $f(g(-1)) \neq g(f(-1))$ .

#### IV. VERDADEIRA.

Note que  $g(x)$  é uma função polinomial de grau 2, portanto contínua para qualquer  $x$  pertencente aos reais.

## V. VERDADEIRA.

Note que a função  $f(x)$  não cruza o eixo  $x$ .

- Para valores de  $x > 0$ ,  $f(x) = 1/x$  e não tem valor de  $x$  que faz  $f(x) = 0$ .

$\frac{1}{x} = 0 \rightarrow 1 = 0$  e não pode ser verdade. Portanto não há raízes para  $x > 0$ .

- Para valores de  $x \leq 0$ , teríamos:

$$f(x) = 0$$

$$1 - x = 0$$

$$x = 1$$

Note que a raiz seria  $x=1$ , que não pertence a região de  $x \leq 0$ .

Logo não há raiz nem para  $x > 0$  nem para  $x \leq 0$ .

Logo, há **3** assertivas **VERDADEIRAS**.

### Questão 05

### Alternativa: C

Para resolver esta questão, basta substituir  $R$  pelo valor dado e calcular o tempo  $t$ , usando logaritmo.

$$\begin{aligned}R &= \left(\frac{1}{10^{12}}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\5,4 \times 10^{-18} &= \left(\frac{1}{10^{12}}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\(5,4 \times 10^{-18}) \cdot (1 \times 10^{12}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\5,4 \times 10^{-6} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\\log(5,4 \times 10^{-6}) &= \log\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\\log(5,4 \times 10^{-6}) &= \log\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\\log(5,4 \times 10^{-6}) &= \left(\frac{t}{5715}\right) \log\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$t = 5715 \cdot \frac{\log(5,4 \times 10^{-6})}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$t \cong 100.004 \text{ anos}$$

## Questão 06

### Alternativa: D

Para resolver este problema, é necessário calcular a área representada por cada cor e comparar o tamanho desta área com a área total do alvo.

**Área total do alvo ( $A_T$ ):** quadrado de lado igual a 50 cm.

$$A_T = 50^2 = 2.500 \text{ cm}^2$$

**Área vermelha ( $A_{VM}$ ):** círculo de raio igual a 5 cm.

$$A_{VM} = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ cm}^2$$

**Área azul ( $A_{AZ}$ ):** coroa circular de raio interno 5 cm e raio externo 15 cm.

$$A_{AZ} = \pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 5^2 = 628,32 \text{ cm}^2$$

**Área verde ( $A_{VD}$ ):** área total subtraída das áreas azul e vermelha.

$$A_{VD} = 2.500 - 78,54 - 628,32 = 1793,14$$

Calculando as probabilidades de cada região. A probabilidade de acerto em cada cor será dada por:

$$P(\text{cor}) = \frac{\text{Área da Cor}}{\text{Área Total}}$$

Logo:

**Probabilidade de acerto na área vermelha ( $P_{VM}$ ):**  $P_{VM} = \frac{78,54}{2.500} = 0,0314$ .

**Probabilidade de acerto na área azul ( $P_{AZ}$ ):**  $P_{AZ} = \frac{628,32}{2.500} = 0,2513$ .

**Probabilidade de acerto na área verde ( $P_{VD}$ ):**  $P_{VD} = \frac{1.793,14}{2.500} = 0,7173$ .

A pessoa irá lançar dois dardos e pretende-se obter a probabilidade de acertar pelo menos um na área vermelha. Pode-se abordar este problema por dois caminhos:



- Caminho A: calcular a chance de não acertar nenhum na região vermelha. A probabilidade de não acertar a região vermelha é  $1 - 0,0314 = 0,9686$ . Neste caso o resultado seria:

NÃO VERMELHO e NÃO VERMELHO

$$P(\text{NÃO VERMELHO e NÃO VERMELHO}) = 0,9686 \cdot 0,9686 = 0,9382$$

Se a chance de não acertar nenhum no vermelho é 0,9382, a chance de acertar pelo menos um dardo no vermelho será:

$$(1 - 0,9382) = 0,0618 \cong \mathbf{6,2\%}$$

- Caminho B: calcular a chance de acertar um dardo na região vermelha e outro dado em outra cor e somar com a chance de acertar os dois dardos na região vermelha.

A probabilidade de não acertar a região vermelha é  $1 - 0,0314 = 0,9686$ .

#### **1 Dardo no vermelho**

NÃO VERMELHO e VERMELHO:

$$P(\text{NÃO VERMELHO e VERMELHO}) = 0,9686 \cdot 0,0314 = 0,0304$$

OU

VERMELHO e NÃO VERMELHO:

$$P(\text{VERMELHO e NÃO VERMELHO}) = 0,0314 \cdot 0,9686 = 0,0304$$

$$P(1 \text{ Dardo no vermelho}) = 0,0304 + 0,0304 = 0,0608$$

#### **2 Dardos no vermelho**

VERMELHO e VERMELHO:

$$P(\text{VERMELHO e VERMELHO}) = 0,0314 \cdot 0,0314 = 0,0010$$

$$P(2 \text{ Dardos no vermelho}) = 0,0010$$

Agora, basta somar a probabilidade de acertar 1 dado no vermelho com a probabilidade de acertar 2 dardos no vermelho.

$$0,0608 + 0,0010 = 0,0618 \cong \mathbf{6,2\%}$$

### Questão 07

Resposta: **3050**

Note neste problema que a quantidade  $q$  é a variável do problema, sendo que a quantidade encomendada é a mesma quantidade produzida. Neste problema, temos:

- **Custo Total:** será a soma do custo fixo mínimo (R\$ 1.000,00) mais o custo de produção de  $q$  unidades, sendo que cada unidade acrescenta R\$ 2,00.

$$C_T = 1000 + 2q$$

- **Receita Total:** montante que será pago pela compra das  $q$  unidades encomendadas. Cada unidade tem preço dado por  $p = 20 - 0,02q$ . Logo

$$R_T = p \cdot q = (20 - 0,02q) \cdot q = 20q - 0,02q^2$$

$$R_T = (20 - 0,02q) \cdot q$$

$$R_T = 20q - 0,02q^2$$

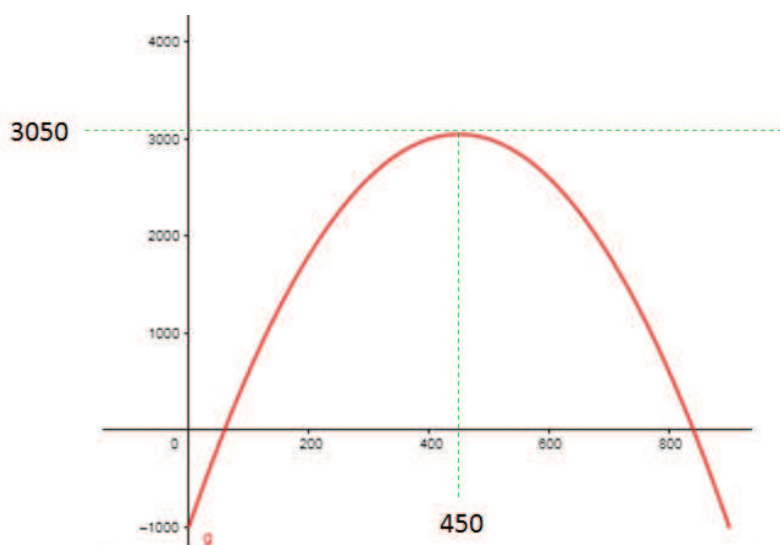
- **Lucro:** diferença entre a receita total e o custo total. Neste caso, o lucro, em função da quantidade  $q$ , será:

$$L = R_T - C_T$$

$$L = 20q - 0,02q^2 - (1000 + 2q)$$

$$L = -0,02q^2 + 18q - 1000$$

Note que o lucro é uma função de segundo grau e o gráfico é uma parábola voltada para baixo. Ver o gráfico da função abaixo:



Esta função tem um máximo que ocorre no vértice da parábola. Calculando as coordenadas do vértice:

$$q_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{2 \cdot (-0,02)} = 450$$

Calculando o lucro para  $q=450$ , ponto de máximo da função.

$$L(450) = -0,02 \cdot (450)^2 + 18 \cdot 450 - 1000$$

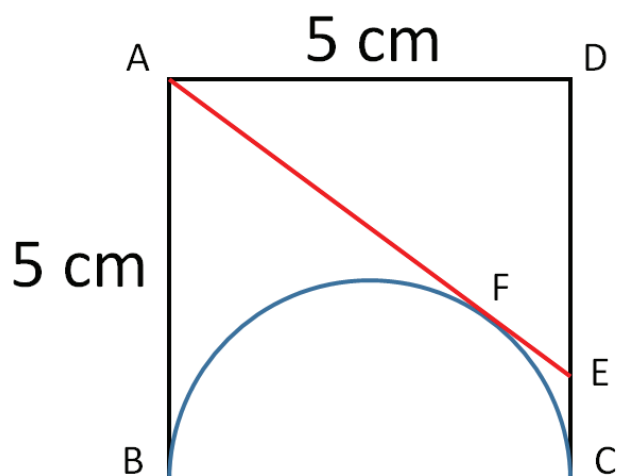
$$L(450) = 3.050$$

Logo, o lucro será máximo quando forem encomendadas 450 unidades, resultando em um lucro de **R\$ 3.050,00**.

### Questão 08

#### Alternativa: D

Vamos começar pela figura. Note que foram adicionados alguns pontos para facilitar a resolução.



Deve-se notar que duas retas tangentes a uma circunferência a partir de um ponto externo tem o mesmo comprimento. Note que B e F são pontos de tangência a partir do ponto A. Neste caso:

$$AF = AB = 5$$

Similarmente, F e C são pontos de tangência a partir do ponto E, logo:

$$EF = EC = x$$

Neste caso, teremos o triângulo retângulo ADE, retângulo em D, sendo AE a hipotenusa, AD e DE os catetos. Note que:

$$AD = 5$$

$$DE = DC - EC = 5 - x$$

$$AE = AF + EF = 5 + x$$

Com estes valores e usando o Teorema de Pitágoras:

$$(AE)^2 = (AD)^2 + (DE)^2$$

$$(5 + x)^2 = 5^2 + (5 - x)^2$$

$$25 + 2x + x^2 = 25 + 25 - 2x + x^2$$

$$2x + 2x = 25$$

$$4x = 25$$

$$x = 6,25$$

### Questão 09

**Resposta:** 183.

*Solução:*

Dado que todas as colunas têm soma de entradas igual a 1, então a matriz é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & c \\ 0,60 & b & 0,15 \\ a & 0,10 & 0,80 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,05 \\ 0,6 & 0,7 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

No prazo de vinte anos aplica-se duas vezes a matriz de transição, ou seja,  $A \times A$ .

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,05 \\ 0,6 & 0,7 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,05 \\ 0,6 & 0,7 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Ou seja,  $A \times A =$

$$\begin{pmatrix} 0,215 & 0,205 & 0,085 \\ 0,615 & 0,625 & 0,255 \\ 0,17 & 0,17 & 0,66 \end{pmatrix}$$

Neste sentido, a probabilidade no prazo de 20 anos de uma pessoa com capacidade financeira RICA passar para pobre é dada pelo elemento  $a_{13}$  da matriz acima, ou seja,

$$a_{13} = 0.085 \Rightarrow \frac{85}{1000} = \frac{17}{200}$$
$$\Rightarrow a_{13} = \frac{a}{b} = \frac{17}{200}$$

Então

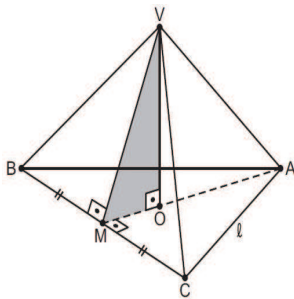
$$b - a = 200 - 17 = 183$$

### Questão 10

**Resposta:** 11.

*Solução:*

A figura abaixo exhibe a situação do problema:



Observe que as faces do tetraedro são tipicamente triângulos equiláteros. O ponto  $O$  é o *baricentro* do triângulo que figura como a base do tetraedro. Neste sentido,

$$\begin{aligned} OM &= \frac{1}{3} \frac{l\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{l\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Note que  $VM$  é o segmento que corresponde a altura da face triangular  $\Delta VBC$ . Ou seja,

$$VM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Aplicando o *Teorema de Pitágoras* no triângulo  $VOM$ , temos que:



$$\begin{aligned}
(VO)^2 + (OM)^2 &= (VM)^2 \\
(VO)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 &= \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
\Rightarrow (VO)^2 &= \frac{3l^2}{4} - \frac{3l^2}{36} \\
&= \frac{24l^2}{36}
\end{aligned}$$

Então,

$$(VO) = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

Uma vez que  $(\bar{VO})$  é a altura do tetraedro relativa à base  $ABC$ , então o volume do tetraedro é dado por:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12} \\
\Rightarrow V &= \frac{l^3\sqrt{2}}{12} \quad (I)
\end{aligned}$$

Para achar o valor de  $l$ , basta calcular a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ . Vejamos,

$$\begin{aligned}
d_{AB} &= \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} \\
d_{AB} &= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow l = 2\sqrt{2} \quad (II)$$

Voltando  $II$  em  $I$ , temos que:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{(2\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} \\
V &= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Então,

$$V = \frac{a}{b} = \frac{8}{3} \Rightarrow a + b = 8 + 3 = 11$$