

Questão 01 (MÉDIO)

As funções $f(x)$ e $g(x)$ estão definidas abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \\ 1 - x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2$$

Analise as assertivas de I a V e classifique-as em Verdadeira ou Falsa.

- I. Não existe o valor de $f(0)$.
- II. Existe apenas um ponto de interseção entre a função $f(x)$ e $g(x)$ para os valores de $x \leq 0$.
- III. $f(g(-1)) = g(f(-1))$.
- IV. A função $g(x)$ é contínua para todo x real.
- V. A função $f(x)$ não tem raízes reais.

Assinale a alternativa que representa o número de assertivas VERDADEIRAS.

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Questão 02 (MÉDIO)

Nos materiais orgânicos vivos, a proporção de isótopos de carbono radioativos em relação ao número total de átomos de carbono é de cerca de 1 para 10^{12} . Quando o material orgânico morre, seus isótopos de carbono radioativos começam a se decompor, com meia-vida de 5.715 anos. Ou seja, após 5.715 anos, a proporção de isótopos por átomos terá diminuído para metade da proporção original, e assim por diante. A função da proporção R de isótopos de carbono radioativos por átomos de carbono em função do tempo (t) em anos é dada por:

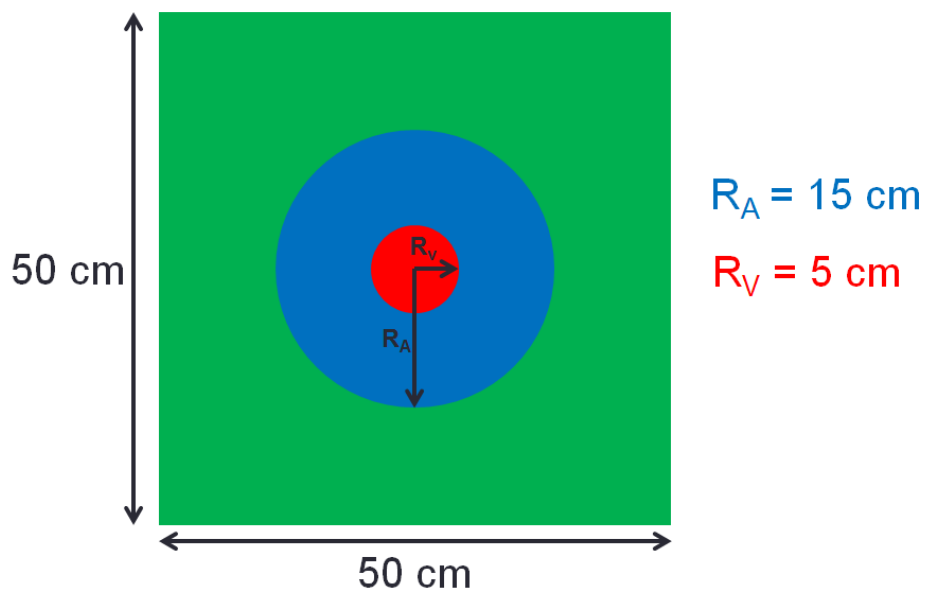
$$R = \left(\frac{1}{10^{12}}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715}$$

Assinale a alternativa que mais se aproxima do tempo de morte de um material, cujo R é igual a $5,4 \times 10^{-18}$.

- (A) 10.000 anos
- (B) 50.000 anos
- (C) 100.000 anos
- (D) 200.000 anos
- (E) 1.000.000 anos

Questão 03 (MÉDIO)

Jogo de Dardos é um esporte que consiste em arremessar dardos contra um alvo pendurado em uma superfície vertical. Um aluno do curso de matemática, criou um alvo modificado em relação ao jogo original e está representado na figura abaixo com as respectivas medidas.



Supondo que uma pessoa irá lançar dois dardos, assinale a alternativa que mais se aproxima da probabilidade de que o jogador acerte pelo menos um dardo na região vermelha.

Dica: a probabilidade será proporcional à área da região e todo dardo necessariamente acerta alguma região do alvo.

- (A) 0,1 %
- (B) 2,3 %
- (C) 3,1 %
- (D) 6,2 %
- (E) 9,2 %

Questão 04 (MÉDIO)

A empresa CHAVES produz chaveiros metálicos personalizados. Para fabricar um lote específico, a empresa tem um custo mínimo fixo de R\$ 1.000,00 e gasta mais R\$ 2,00 por cada chaveiro produzido para o lote. O preço (p) do chaveiro para o consumidor é dado em função da quantidade (q) encomendada e segue a seguinte função:

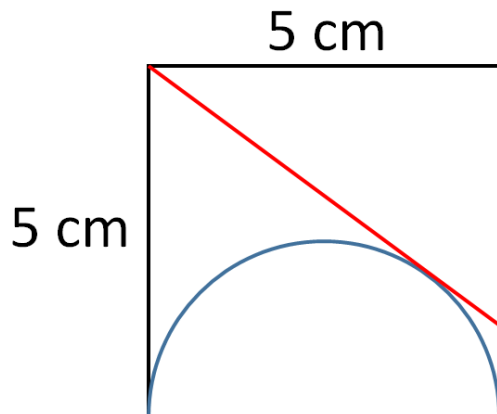
$$p = 20 - 0,02q$$

O lucro obtido por lote é dado pela diferença entre a receita na venda dos chaveiros encomendados e o custo para produzir a quantidade encomendada.

Preencha a lacuna com o valor do máximo lucro que a empresa pode obter na venda de um determinado lote. Suponha que a quantidade encomendada seja exatamente igual a quantidade produzida.

Questão 05 (MÉDIO)

Um quadrado de lado igual a 5 cm tem uma semicircunferência inscrita ao longo de um dos lados do quadrado conforme ilustrado na figura abaixo.



Assinale a alternativa que mais se aproxima do comprimento da linha vermelha que é tangente a semicircunferência.

- (A) 5,00 cm
- (B) 5,50 cm
- (C) 5,90 cm
- (D) 6,25 cm
- (E) 7,10 cm

Questão 06 (MÉDIO)

Uma matriz de transição, matriz estocástica ou ainda matriz de Markov (em homenagem ao matemático russo Andrey Markov) é uma matriz quadrada que tem duas características:

- 1) Todos os elementos são não-negativos
- 2) Todas as colunas têm soma de entradas igual a 1.

Na matriz de transição, cada elemento a_{ij} representa a probabilidade de transição do estado j para o estado i em um estágio futuro.

Vamos supor que a população de um país seja dividida em três estados com relação à renda:

Índice 1: POBRE

Índice 2: MÉDIA

Índice 3: RICA

A cada 10 anos a população muda seu estado, e a matriz de transição da capacidade financeira das pessoas é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & c \\ 0,60 & b & 0,15 \\ a & 0,10 & 0,80 \end{pmatrix}$$

Por exemplo, o elemento a_{21} , representa a probabilidade de no prazo de 10 anos, uma pessoa POBRE passar para MÉDIA em relação a capacidade financeira.

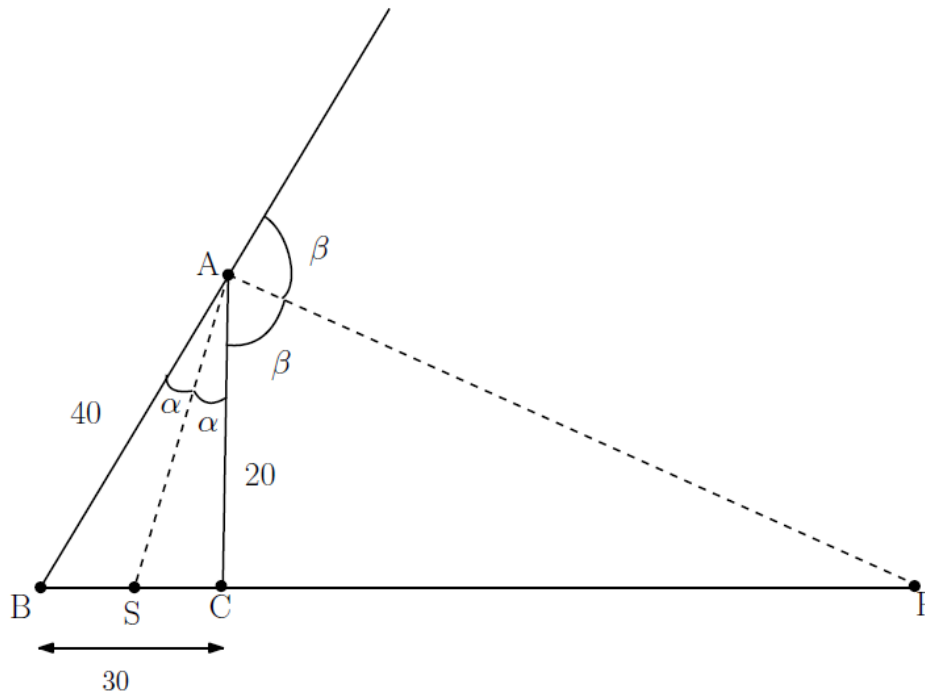
Qual é a probabilidade no prazo de 20 anos de uma pessoa com capacidade financeira RICA passar para pobre? Escreva o valor da probabilidade como fração irredutível na forma a / b e escreva na lacuna o valor de $b - a$.

Questão 07 (MÉDIO)

Com respeito ao sistema cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0,0)$, $B = (2,2)$ e $C = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. O volume V do tetraedro pode ser escrito na forma de fração irredutível: $V = a / b$. Escreva na lacuna o valor de $a + b$:

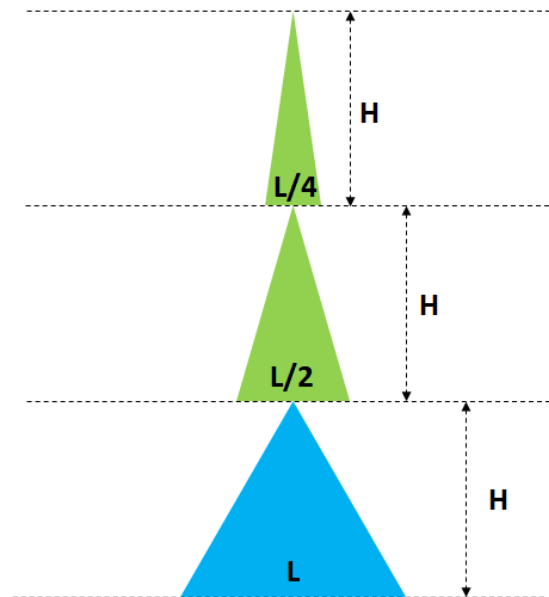
Questão 08 (DIFÍCIL)

Considere o triângulo ABC da figura abaixo. Sabendo que o lado AB mede 40, o lado BC mede 30 e o lado AC mede 20, calcule a medida do segmento SP.



Questão 09 (DIFÍCIL)

João está construindo uma torre a partir de triângulos. A base é um triângulo equilátero de lado L e os demais são triângulos isósceles com base igual à metade da base do triângulo de baixo. Todos os triângulos têm a mesma altura. A figura abaixo ilustra os três primeiros triângulos:



João pintou o triângulo da base com tinta azul e gastou exatamente uma lata de 900 ml. Os demais serão pintados com tinta verde e João tem apenas uma lata de 800 ml. Preencha a lacuna com a quantidade de triângulos verdes que serão completamente pintados com a tinta disponível.

Questão 10 (DIFÍCIL)

A figura abaixo representa uma circunferência de raio R . Duas cordas perpendiculares, AB e CD , também estão representadas na figura com três medidas conhecidas e uma desconhecida. As duas cordas se interceptam ortogonalmente no ponto O .

Preencha a lacuna o valor de z , sabendo que $z = (2R)^2$.

