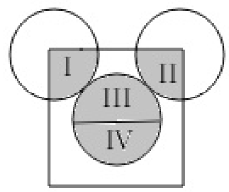
$1^{\underline{o}}$ Jogo Concurso Online de Matemática PUC-Campinas

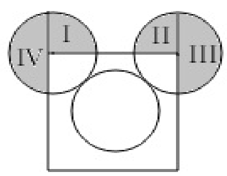
Resolução da Prova-Nível B da Segunda Fase

1. (*Alternativa* $\quad b$)

   Observe que a região sombreada pode se sobrepor exatamente à região não sombreada. Com efeito, vamos representar a região sombreada como sendo a união das regiões I, II, III e IV conforme exibe a figura abaixo:

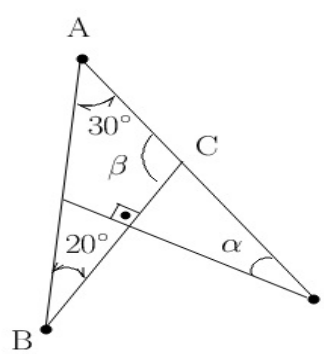
   

   Agora vamos deslocar as regiões marcadas para a posição das regiões não sombreadas de acordo com a figura abaixo.

   Logo, a razão entre a área da região sombreada dos três círculos e a área da região não sombreada dos três círculos é igual a $1:1$

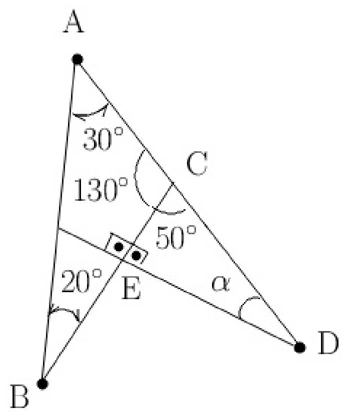
2. (*Alternativa* $\quad c$)
   Considere o triângulo ABC na figura abaixo:

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, temos que:

$$\begin{aligned} 30° + 20° + \beta &= 180° \\ \beta &= 180° - 20° - 30° \\ \beta &= 130° \end{aligned}$$

Considere o triângulo CDE. De fato o ângulo $E\hat{C}D$ é igual a $50°$ pois é o suplementar de $130°$, como podemos observar na figura abaixo.



Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, então teremos que:

$$\begin{aligned} 50° + \alpha + 90° &= 180° \\ \alpha &= 180° - 50° - 90° \\ \alpha &= 40° \end{aligned}$$

3. (*Alternativa d*)

   Para conseguirmos comparar as frações dadas no enunciado do nosso problema, de fato precisamos fixar um numerador comum ou um denominador comum para as frações. Como o numerador de cada fração contempla ou p ou $2p$ ou $3p$ então será mais fácil fixarmos o numerador. Sabemos que ao multiplicar tanto o numerador quanto o denominador por um mesmo número, diferente de zero, de fato obtemos uma fração equivalente. Em particular, podemos multiplicar pelo número cujo resultado da multiplicação é o mmc entre 1, 2 e 3. No caso, o mmc destes números é o número 6. Então,

$$\begin{aligned} &\frac{p}{q-1}, \frac{p}{q+1} \quad , \quad \frac{2p}{2q+1}, \frac{2p}{q-1}, \frac{3p}{3q-1} \\ &\frac{p^{\times 6}}{q-1^{\times 6}}, \frac{p^{\times 6}}{q+1^{\times 6}} \quad , \quad \frac{2p^{\times 3}}{2q+1^{\times 3}}, \frac{2p^{\times 3}}{q-1^{\times 3}}, \frac{3p^{\times 2}}{3q-1^{\times 2}} \\ \Rightarrow &\frac{6p}{6q-6}, \frac{6p}{6q+6} \quad , \quad \frac{6p}{6q+3}, \frac{6p}{3q-3}, \frac{6p}{6q-2} \end{aligned}$$

Observe que obtivemos frações equivalentes, em que todos os numeradores são iguais a 6. Então, basta analisarmos os denominadores. Se diminuírmos o denominador isto implica que iremos aumentar o valor da fração. Então ficamos com as seguintes possibilidades, uma vez que a diferença no denominador implica em uma redução do denominador:

$$\frac{6p}{6q-6}, \frac{6p}{3q-3}, \frac{6p}{6q-2}$$

Temos que $\dfrac{6p}{6q-6} > \dfrac{6p}{6q-2}$, pois o denominador da fração no primeiro membro da desigualdade é menor do que o denominador do segundo membro da desigualdade.

Agora resta compararmos

$$\frac{6p}{6q-6} \quad \text{e} \quad \frac{6p}{3q-3}$$

Vejamos,

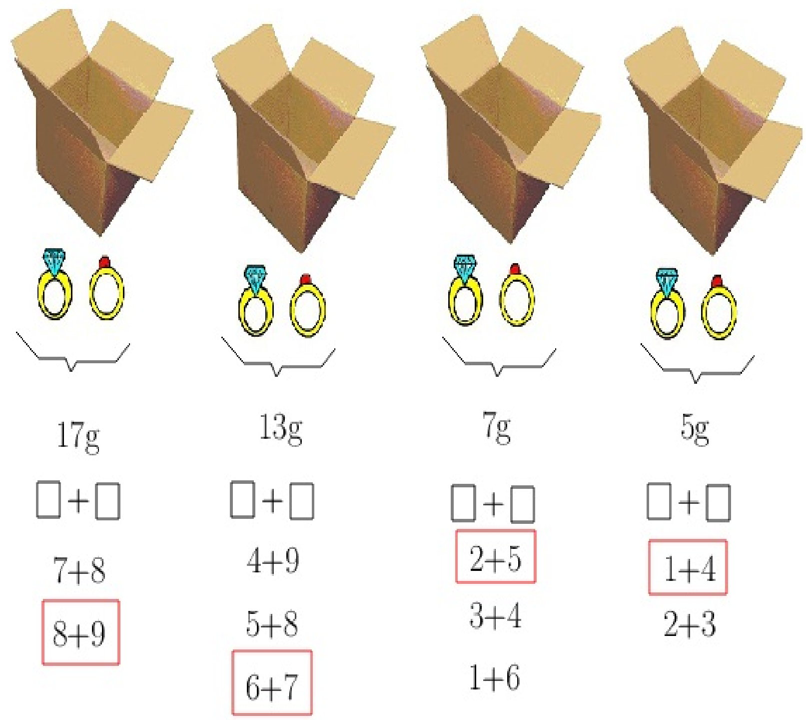
$$\frac{6p}{6q-6} = \frac{6}{6} \times \frac{p}{q-1} = \frac{p}{q-1}$$

Vejamos agora a outra fração:

$$\frac{6p}{3q-3} = \frac{6}{3} \times \frac{p}{q-1} = 2 \times \frac{p}{q-1}$$

Segue então que $\dfrac{6p}{3q-3}$ é duas vezes maior do que $\dfrac{6p}{6q-6}$. Como $\dfrac{2p}{q-1} = \dfrac{6p}{3q-3}$, isto implica que $\dfrac{2p}{q-1}$ assume o maior valor.

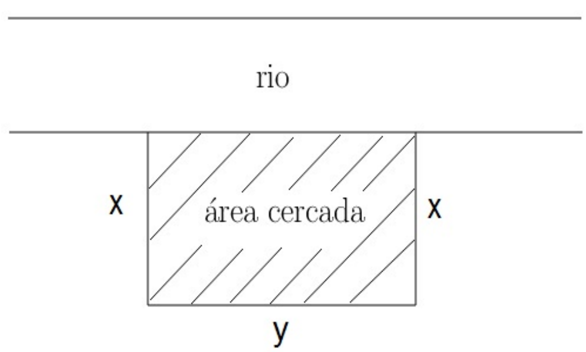
4. (*Alternativa* b)
   Como temos 9 tipos de anéis pesando de $1g$ até $9g$. De fato precisamos analisar as diferentes possibilidades de compor dois anéis em cada uma das quatro caixas, respeitando o peso em cada caixa. O desenho abaixo ilustra a situação e as possibilidades:



Observe que a única possibilidade de configuração em que um anel não aparece simultaneamente em duas caixas é a configuração destacada em vermelho. Isto implica que o anel que Marilda não utilizou pesa 3 gramas.

5. (*Alternativa* a)

   Observe que o foco do nosso problema é determinar a área máxima de um cercado retangular. Como esta área depende dos lados do cercado, então vamos considerar x e y para denotar os lados da área retangular, conforme exibe o desenho abaixo:



   Desta forma, estamos interessados em maximizar a seguinte quantidade:

$$A = x \cdot y, \qquad (I)$$

De fato temos uma informação do comprimento da cerca, que em termos das nossas variáveis fica:

$$\begin{aligned} x+y+x &= 120 \\ y+2x &= 120 \\ \Rightarrow y &= 120-2x, \qquad (II) \end{aligned}$$

Substituindo II em I, nós teremos que:

$$\begin{aligned} A &= x\cdot(120-2x) \\ \Rightarrow A &= 120x-2x^2, \quad (III) \end{aligned}$$

Observe da Equação III que a área pode ser entendida como uma função quadrática que depende de um dos lados do cercado. Como o coeficiente a é negativo, isto implica que a concavidade da parábola é para baixo, evidenciando a existência de um ponto de máximo, que no caso corresponde ao próprio vértice da parábola que é dado por:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) \qquad (IV)$$

Em particular, vamos calcular x_v de acordo com a Equação IV:

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} \\ &= \frac{-120}{2\cdot(-2)} \\ &= 30 \quad \text{metros} \end{aligned}$$

Voltando $x = 30$ em II, temos que:

$$\begin{aligned} y+2\cdot 30 &= 120 \\ y+60 &= 120 \\ y &= 60 \quad \text{metros} \end{aligned}$$

6. (*Alternativa d*)

Como M é um número de três algarismos, então podemos representá-lo da seguinte forma:

$$M = abc$$

Como o produto dos algarismos de M é 168, então temos que

$$a \cdot b \cdot c = 168, \qquad (I)$$

Como a soma do algarismo da dezena com o algarismo da unidade é igual a 100, então:

$$b + c = 100, \qquad (II)$$

Segue da Equação I que o produto dos algarismos é igual a 168 e como o 168 pode ser decomposto em produto de fatores primos de alguma potência, então:

$$\begin{array}{r|l}
168 & 2 \\
84 & 2 \\
42 & 2 \\
21 & 3 \\
7 & 7 \\
\cline{2-2}
1 & 2^3 \cdot 3 \cdot 7
\end{array}$$

Agora, vejamos as possibilidades de $b + c$ para se cumprir com a condição (II) em que a soma do algarismo da dezena com o algarismo da unidade é igual a 10:

$$\text{b+c=10}$$
$$1+9=10$$
$$2+8=10$$
$$3+7=10$$
$$4+6=10$$
$$5+5=10$$

Observe que dentre as possibilidades que contemplam pelo menos duas potências dos fatores primos da decomposição de 168, temos as seguintes:

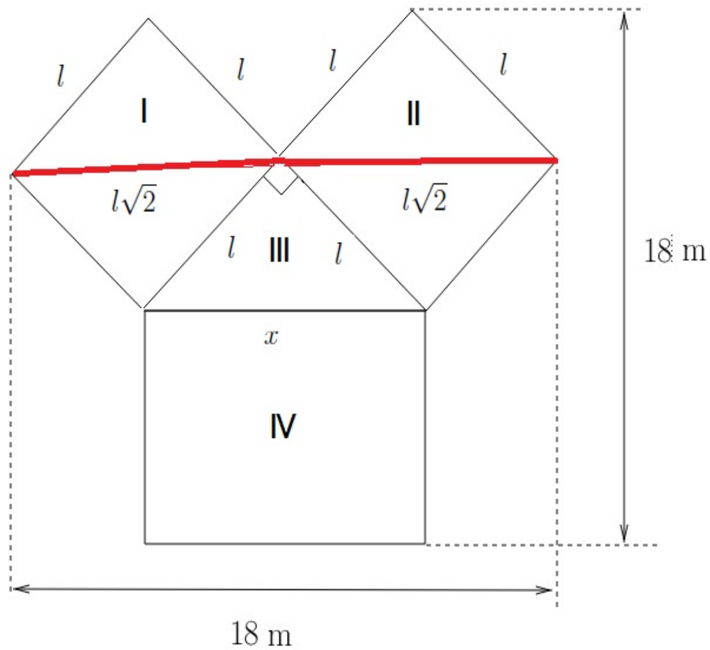
$$3+7=10$$
$$4+6=10$$

Com efeito, pois $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 8 \cdot 3 \cdot 7$ ou também $168 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 4 \cdot 6 \cdot 7 = 7 \cdot 6 \cdot 4$

Logo podemos escolher 7 como sendo o algarismo das centenas, e neste caso, em particular, teríamos que $M = 764$ ou $M = 746$

7. (*Alternativa d*)

Como um quadrado tem todos os lados iguais, iremos denotar os lados dos quadrados superiores por l e o lado do quadrado inferior por x.



Observe pelo desenho que a soma das diagonais dos quadrados superiores é igual a 18, ou seja,

$$
\begin{aligned}
l\sqrt{2} + l\sqrt{2} &= 18 \\
2l\sqrt{2} &= 18 \\
\Rightarrow l &= \frac{9\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Vamos calcular a área I:

$$
\begin{aligned}
A_I &= l^2 \\
&= \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{81}{2}
\end{aligned}
$$

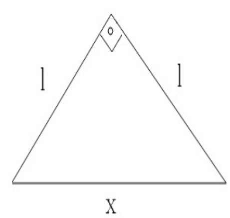
Como os quadrados superiores são iguais, segue que:

$$A_{II} = A_I = \frac{81}{2}$$

Cálculo da área A_{III}

$$\begin{aligned} A_{III} &= \frac{l \cdot l}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} \\ &= \frac{\frac{81}{2}}{2} \\ &= \frac{81}{4} \end{aligned}$$

Para calcular a área IV, precisaremos calcular o valor do lado x do quadrado inferior. Ou seja, vamos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo III para determinar a medida x:



$$\begin{aligned} x^2 &= l^2 + l^2 \\ &= 2l^2 \Rightarrow x = l\sqrt{2} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} x &= \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Como $A_{IV} = x^2 \Rightarrow A_{IV} = 81$

A soma total das áreas será dada por:

$$
\begin{aligned}
A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} &= \frac{81}{2} + \frac{81}{2} + \frac{81}{4} + 81 \\
&= \frac{729}{4}
\end{aligned}
$$

8. (*Alternativa* *b*)

Perceba que o problema contempla informações que dizem respeito ao momento anterior à divisão e posterior à divisão.

Vamos considerar separadamente cada caso.

Antes da divisão

Definimos as seguintes variáveis para o momento anterior à divisão:

$$
\begin{aligned}
x &= \text{quantidade recebida por Edson antes da divisão} \\
y &= \text{quantidade recebida por Cauê antes da divisão} \\
z &= \text{quantidade recebida por Edvaldo antes da divisão}
\end{aligned}
$$

Como o total recebido corresponde a 150 reais, isto implica que $x + y + z = 150$.

Depois da divisão

Definimos novas variáveis, pois afinal as quantidades recebidas se modificaram. Considere:

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \text{quantidade recebida por Edson depois da divisão} \\
\bar{y} &= \text{quantidade recebida por Cauê depois da divisão} \\
\bar{z} &= \text{quantidade recebida por Edvaldo depois da divisão}
\end{aligned}
$$

Vamos agora traduzir matematicamente as informações dadas em termos das variáveis. "*Edson deu metade do que ganhou para dividir em partes iguais entre Cauê e Edvaldo*"

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= x - \frac{x}{2} \quad (\text{deu } \frac{x}{2}) \\
\bar{y} &= y + \frac{\frac{x}{2}}{2} \quad (\text{recebeu metade de } \frac{x}{2}) \\
\bar{z} &= z + \frac{\frac{x}{2}}{2} \quad (\text{recebeu metade de } \frac{x}{2})
\end{aligned}
$$

"*Cauê deu R$ 10,00 a cada um dos outros dois*"

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= x - \frac{x}{2} + 10 \quad \text{(recebeu 10 reais)} \\
\bar{y} &= y + \frac{x}{4} - 20 \quad \text{(deu 10 reais para cada um dos dois)} \\
\bar{z} &= z + \frac{x}{4} + 10 \quad \text{(recebeu 10 reais)}
\end{aligned}$$

"*Edvaldo deu $R\$2,00$ à Edson*"

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= x - \frac{x}{2} + 10 + 2 \quad \text{(recebeu 10 reais de Edvaldo)} \\
\bar{y} &= y + \frac{x}{4} - 20 \\
\bar{z} &= z + \frac{x}{4} + 10 - 2 \quad \text{(deu 2 reais para Edson)}
\end{aligned}$$

Organizando as equações, nós temos que:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= x + 12 \\
\bar{y} &= y + \frac{x}{4} - 20 \\
\bar{z} &= z + \frac{x}{4} + 10 - 2 \quad \text{(deu 2 reais para Edson)}
\end{aligned}$$

Organizando o último conjunto de equações, nós temos que:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{x}{2} + 12 \quad (I) \\
\bar{y} &= y + \frac{x}{4} - 20 \quad (II) \\
\bar{z} &= z + \frac{x}{4} + 8 \quad (III)
\end{aligned}$$

Como as quantidades, ao final da divisão, foram iguais, isto implica que:

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 50$$

Vamos usar esta informação, em particular, nas Equações I e III: Ou seja,

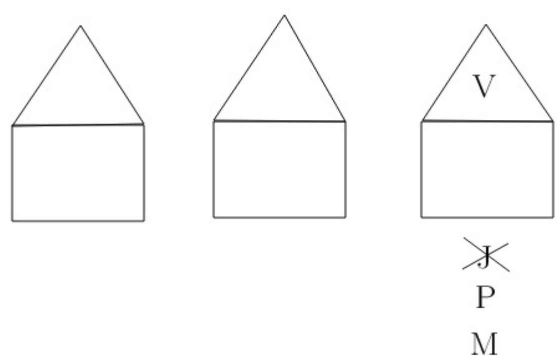
$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + 12 = 50 & (IV) \\ z + \dfrac{x}{4} + 8 = 50 & (V) \end{cases}$$

Multiplicando a Equação IV por $\frac{1}{4}$ e subraindo da Equação V, nós teremos que:

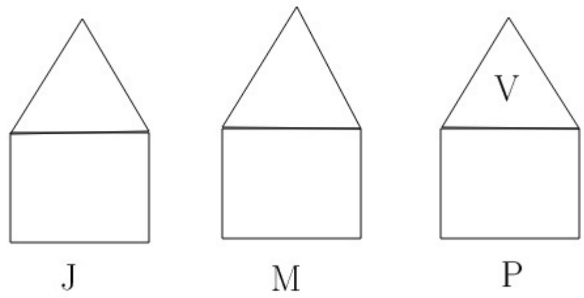
$$\begin{aligned} -z - 2 &= 25 - 50 \\ -z - 2 &= -25 \\ -z &= -25 + 2 \\ -z &= -23 \quad \times(-1) \\ z &= 23 \end{aligned}$$

Isto implica que Edvaldo recebeu 23 reais antes da divisão.

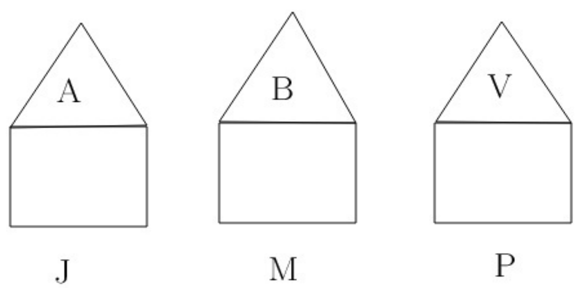
9. (*Alternativa e*)
A informação de que a última casa da direita é verde e que Joaquim não mora na casa verde nos possibilita fazer o seguinte desenho da situação:



Agora usando fortemente o fato que Joaquim e Pedro não são vizinhos, nós temos que, consequentemente, Joaquim mora na primeira casa e Manuel mora na segunda casa. Representamos esta situação no desenho abaixo:



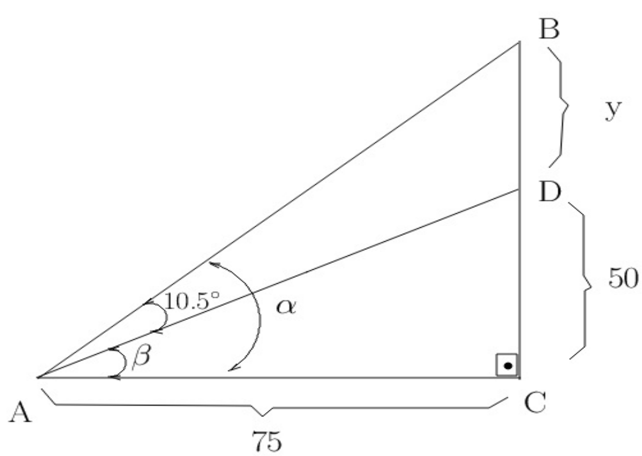
A informação que Manuel não mora na casa amarela implica que Manuel mora na casa branca, uma vez que deduzimos que Pedro mora na casa verde. Desta forma, chegamos ao seguinte resultado ilustrado na figura abaixo:



Desta forma, temos que a correspondência correta do nosso problema é a seguinte:

$$(\text{Pedro}/\text{casa verde}), \quad (\text{Manuel}/\text{casa branca}), \quad (\text{Joaquim}/\text{casa amarela})$$

10. (*Alternativa b*)
A partir do desenho do nosso problema, de fato é possível definir dois triângulos retângulos. Considere os triângulos ABC e ADC representados na figura abaixo:



Empregando a razão trigonométrica tangente ao triângulo ABC, nós temos que:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{y+50}{75} \quad (I)$$

Empregando a razão trigonométrica tangente ao triângulo ADC, nós temos que:

$$\text{tg}(\beta) = \frac{50}{75} \quad (II)$$

Segue da Equação II que:

$$\Rightarrow \text{tg}(\beta) = \frac{50}{75} = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta \approx 33.69^\circ$$

Como $\alpha = \beta + 10.5^\circ$, isto implica que:

$$\begin{aligned} \alpha &= 33.69^\circ + 10.5^\circ \\ \alpha &= 44.19^\circ \end{aligned}$$

Substituindo $\alpha = 44.19^\circ$ na Equação I, temos que:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha) &= \frac{y+50}{75} \\ \underbrace{\text{tg}(44.19^\circ)} &= \frac{y+50}{75} \\ 0.97 &= \frac{y+50}{75} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0.97\times &= y+50 \\ 72.75 &= y+50 \\ 72.75-50 &= y \Rightarrow y = 72.75-50 \Rightarrow y = 22.75 \end{aligned}$$

Temos então que a altura da antena é aproximadamente igual a $22.75 \quad$ metros.