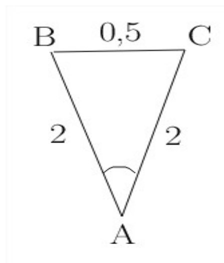
4º Jogo Concurso Online de Matemática PUC-Campinas

Gabarito - Segunda Fase-Nível B

1. *Resposta:* 14 graus

   Solução:

   Podemos extrair, a partir do desenho, o seguinte triângulo:



   Como temos os três lados, nós podemos usar a *lei dos cossenos* para encontrar o ângulo $\hat{A}$. Vejamos,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \\ (0,5)^2 &= 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos(\hat{A}) \\ 0,25 &= 4 + 4 - 8\cos(\hat{A}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(\hat{A}) = \frac{4 + 4 - 0.25}{8} \Rightarrow \cos(\hat{A}) = 0,96875$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 14,36° \Rightarrow \hat{A} \approx 14°$$

2. *Resposta:* 3375

   Solução:

Desejamos que o volume do cone seja igual à $\frac{2}{3}$ do volume da esfera. Ou seja,

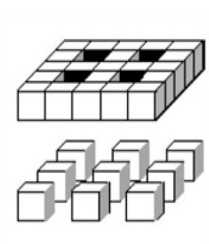
$$\begin{aligned}
V_{cone} &= \frac{2}{3}V_{esfera} \\
\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h &= \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \\
\Rightarrow \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 10 &= \frac{8}{3^2} \cdot \pi \cdot R^3 \\
30 &= \frac{8}{3^2}R^3 \\
\Rightarrow R^3 &= \frac{3^3 \cdot 5}{4} \\
R &= \frac{3\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}
\end{aligned}$$

Então, temos que o valor de $100 \cdot R^3$ é dado por:

$$100 \cdot R^3 = 100 \cdot \left(\frac{3\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}\right)^3 = 3375$$

3. *Resposta:* 81
Solução:

Vamos contar os cubos que restaram ao longo dos níveis.



Existem três níveis com $(5 \times 4 + 5) - 4$ cubos e dois níveis com 9 cubos. Ento no total permanecem: $3 \times ((5 \times 4 + 5) - 4) + 2 \times 9 = 81$ cubos.

4. *Resposta: Alternativa* (b)

   Solução:

   As velocidades de correção dos corretores são dadas por:

$$\begin{aligned} v_{beatriz} &= \frac{5}{10}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \Rightarrow v_{beatriz} = \frac{1}{2}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \\ v_{alexan} &= \frac{3}{10}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \Rightarrow v_{alexan} = \frac{3}{10}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \\ v_{alex} &= \frac{2}{10}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \Rightarrow v_{alex} = \frac{1}{5}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \end{aligned}$$

   Vamos, inicialmente, determinar o tempo x o qual a Beatriz, que é a corretora mais rápida, dispende para corrigir 600 provas:

$$v_{beatriz} \cdot x = 600 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x = 600 \Rightarrow x = 1200 \quad \text{min}$$

   Vejamos agora quantas provas o Alexandre, que é o segundo corretor mais rápido, corrige em 1200 minutos.

   Em 1200, Alexandre corrige:

$$v_{alexandre} \cdot 1200 = \frac{3}{10} \cdot 1200 = 360 \text{ provas}$$

   Desta forma, com respeito ao monte de provas do Alexandre, existem 240 provas para serem corrigidas por Alexandre e Beatriz em um certo tempo y que iremos determinar:

$$\begin{aligned} (v_{beatriz} + v_{alexan}) \cdot y &= 240\text{provas} \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\right) y &= 240 \\ \frac{10+6}{20} \cdot y &= 240 \\ \frac{16}{20} \cdot y &= 240 \\ y &= \frac{240 \cdot 20}{16} \\ y &= 300 \text{ min} \end{aligned}$$

   Então em $1200 + 300 = 1500 \quad \text{min}$ os corretores Beatriz e Alexandre corrigem as suas provas.

   Em 1500 minutos, Alex corrige:

$$v_{alex} \cdot 1500 = \frac{1}{5} \cdot 1500 = 300 \quad \text{provas}$$

Então, vejamos qual é o tempo z que os três corretores dispendem para corrigir as $600 - 300 = 300$ provas restantes do monte de Alex:

$$\begin{aligned}
(v_{beatriz} + v_{alexan} + v_{alex}) \cdot z &= 300 \\
\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5}\right) \cdot z &= 300 \\
\frac{5+3+2}{10} \cdot z &= 300 \\
\frac{10}{10} z &= 300 \\
z &= 300\text{min}
\end{aligned}$$

Então, o tempo total de correção será igual a:

$$\text{T}_{total} = 1500 + 300 = 1800\text{min} \Rightarrow \text{T}_{total} = 30\text{horas}$$

Considerando 12 horas por dia, teremos 2 dias mais 6 horas.

Como os corretores começaram a corrigir as provas na segunda-feira às 8h00, então terminaram a correção na quarta-feira, às 15h00 (contando com a paradinha para o almoço).

5. *Resposta:* 9 pessoas

   Solução:

   Para termos o menor número de pessoas a serem retiradas precisamos ter o menor número possível de Vascaínos ou Ibisenses em C. Desta forma contamos com 12 Motoclubenses mais 1 Vascaíno e dois Ibisenses ou 12Motoclubenses mais 1 Ibisense e 2 Vascainos.

   Sobra então em $U - C$:

   ou 9 ibisenses e 6 vascaínos

   ou 8 ibisenses e 7 vascaínos.

   Do primeiro conjunto teríamos que retirar com certeza pelo menos 10 pessoas. No segundo, pelo menos 9 pessoas.

6. *Questão Cancelada*
(*Houve um equívoco na digitação do valor do percentual de desgaste do raio no enunciado da questão. De fato, era para ser considerado* $0,1\%$

De toda a forma, encaminhamos abaixo a resolução considerando o percentual de desgaste de $0,1\%$.

Solução:

Se o pneu percorre 1000 Km, então:

$$\begin{aligned} \text{raio}_{desgast} &= R - 0,001R \\ &= R(1-0,001) \end{aligned}$$

Se o pneu percorre 2×1000 Km, então:

$$\begin{aligned} \text{raio}_{desgast} &= R(1-0,001) - 0,001 \cdot R(1-0,001) \\ &= R(1-0,001) \cdot (1-0,001) \\ &= R(1-0,001)^2 \end{aligned}$$

Se o pneu percorre $N \times 1000$ Km, então:

$$\text{raio}_{desgast} = R(1-0,001)^N$$

Desejamos agora, para um raio R inicial $R = 50$. que:

$$\begin{aligned} R(1-0,001)^N &= 50 - 1,5 \\ 50(1-0,001)^N &= 48,5 \\ (1-0,001)^N &= \frac{48,5}{50} \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo natural a ambos os membros da equação acima, nós temos que:

$$\text{Ln}(1-0,001)^N = \text{Ln}\left(\frac{48,5}{50}\right)$$

$$\begin{aligned} N \cdot \text{Ln}(1-0,001) &= \text{Ln}\left(\frac{48,5}{50}\right) \\ N &= \frac{\text{Ln}\left(\frac{48,5}{50}\right)}{\text{Ln}(1-0,001)} \\ N &= 30,443 \end{aligned}$$

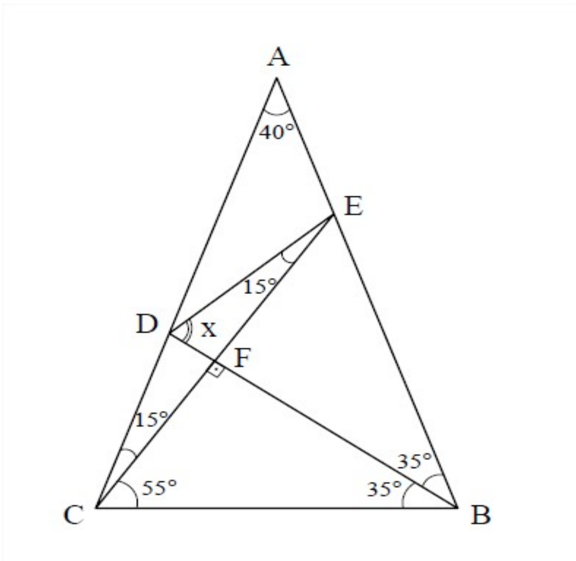
Logo, o desgaste se dará após:

$$N \cdot 1000 \text{ km} = 30,443 \cdot 1000 \Rightarrow N \cdot 1000 \text{ km} = 30443 \text{ km}$$

7. *Resposta:* 75

   Solução:

   A partir do enunciado, nós consolidamos o seguinte desenho:

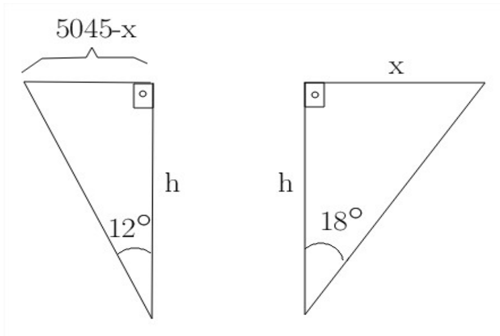


   Veja no triângulo ΔABC que $\hat{C} = \hat{B} = 70°$. Note que o triângulo ΔCBE é um triângulo isósceles, uma vez que a bissetriz $\bar{BF}$ corresponde a uma altura e, consequentemente, mediana ($\bar{CF} = \bar{FE}$). O triângulo ΔCDE é um triângulo isósceles, pois $\bar{DF}$ é altura e mediana. Desta forma, temos que $\hat{E} = 15°$. No triângulo ΔDEF, temos que
   $E\hat{D}F + 15° = 90° \Rightarrow E\hat{D}F = E\hat{D}B = 75°$.

8. *Resposta:* 9386 pés

Solução:

Podemos extrarir os seguintes dois triângulos retângulos de referência a partir do desenho do problema:



Aplicando a razão trigonométrica *tangente* aos dois triângulos retângulos, nós temos que:

$$\begin{cases} \text{tg}(12^\circ) = \dfrac{5045 - x}{h} & (I) \\ \\ \text{tg}(18^\circ) = \dfrac{x}{h} & (II) \end{cases}$$

Segue da Equação I que:

$$h = \frac{5045 - x}{\text{tg}(12^\circ)} \qquad (III)$$

Segue da Equação II que:

$$h = \frac{x}{\text{tg}(18^\circ)} \qquad (IV)$$

Comparando as Equações III e IV, nós temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\text{tg}(18^\circ)} &= \frac{5045 - x}{\text{tg}(12^\circ)} \\
\frac{x}{\text{tg}(18^\circ)} &= \frac{5045}{\text{tg}(12^\circ)} - \frac{x}{\text{tg}(12^\circ)} \\
\Rightarrow \frac{x}{\text{tg}(18^\circ)} + \frac{x}{\text{tg}(12^\circ)} &= \frac{5045}{\text{tg}(12^\circ)} \\
x \cdot \left(\frac{1}{\text{tg}(18^\circ)} + \frac{1}{\text{tg}(12^\circ)} \right) &= \frac{5045}{\text{tg}(12^\circ)} \\
x \cdot \left(\frac{\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ)}{\text{tg}(18^\circ)\text{tg}(12^\circ)} \right) &= \frac{5045}{\text{tg}(12^\circ)} \\
x &= \frac{\dfrac{5045}{\text{tg}(12^\circ)}}{\dfrac{\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ)}{\text{tg}(18^\circ)\text{tg}(12^\circ)}} \\
x &= \frac{5045}{\text{tg}(\cancel{12^\circ})} \cdot \frac{\text{tg}(\cancel{12^\circ}) \cdot \text{tg}(18^\circ)}{(\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ))} \\
x &= \frac{5045 \cdot \text{tg}(18^\circ)}{\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ)} \qquad (V)
\end{aligned}$$

Voltando V em IV, nós temos que:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{\dfrac{5045 \cdot \text{tg}(18^\circ)}{\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ)}}{\text{tg}(18)^\circ} \\
&= \frac{5045 \cdot \text{tg}(18^\circ)}{(\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ))} \cdot \frac{1}{\text{tg}(18^\circ)} \\
&= \frac{5045}{\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ)} \\
&= 9386,46 \Rightarrow h \approx 9386 \quad \text{metros}
\end{aligned}$$

9. *Resposta:* gráfico (a)
Solução:

Temos essencialmente quatro casos a considerar:

caso (I): Se $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow |x| = x$ e $|y| = y$. Então substituindo estas constribuições na equação $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ nós temos que:

$$(x-|x|)^2+(y-|y|)^2 = 4 \Rightarrow (x-x)^2+(y-y)^2 = 4 \Rightarrow 0^2+0^2 = 4 \Rightarrow 0 = 4 \Rightarrow \nexists \text{ solução.}$$

caso (II): Se $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow |x| = -x$ e $|y| = -y$. Então substituindo estas constribuições na equação $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ nós temos que:

$$(x-|x|)^2+(y-|y|)^2 = 4 \Rightarrow (x-(-x))^2+(y-(-y))^2 = 4 \Rightarrow (x+x)^2+(y+y)^2 = 2^2$$

Então,

$$\begin{aligned} (2x)^2 + (2y)^2 &= 4 \\ 4x^2 + 4y^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 1^2 \end{aligned}$$

Esta última equação é a equação de uma circunferência de raio 1, mas como $x < 0$ e $y < 0$, esta equação descreve os pontos que estão na curva referente a um quarto da circunferência, no terceiro quadrante.

caso (III): Se $x < 0$ e $y > 0 \Rightarrow |x| = -x$ e $|y| = y$. Então substituindo estas constribuições na equação $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ nós temos que:

$$(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4 \Rightarrow (x - (-x))^2 + (y - y)^2 = 4 \Rightarrow (2x)^2 = 4 \Rightarrow 4x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ (pois } x < 0)$$

Temos que os pontos (x, y), com $x = -1$ e $y > 0$ descrevem uma semi-reta vertical em $x = -1$ no segundo quadrante.

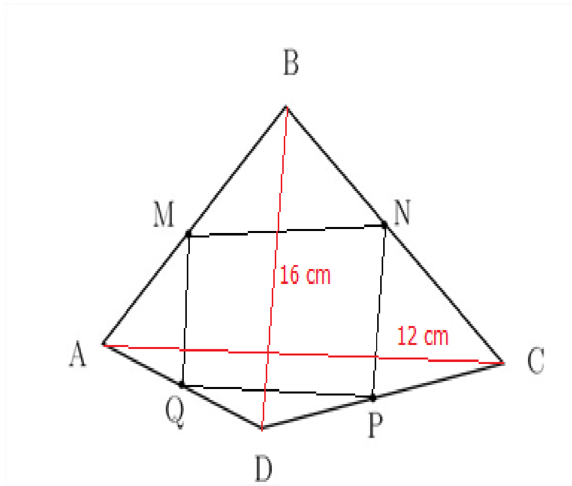
caso (IV): Se $x > 0$ e $y < 0 \Rightarrow |x| = x$ e $|y| = -y$. Então substituindo estas constribuições na equação $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ nós temos que:

$$(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4 \Rightarrow (x - x))^2 + (y - (-y))^2 = 4 \Rightarrow (2y)^2 = 4$$
$$\Rightarrow 4y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = -1 \text{ (pois } y < 0)$$

Temos que os pontos (x, y), com $y = -1$ e $x > 0$ descrevem uma semi-reta horizontal em $y = -1$ no quarto quadrante.

O conjunto solução então corresponde a união das soluções obtidas nos casos II, III e IV. Geometricamente este conjunto solução pode ser caracterizado pelo gráfico (a).

10. *Resposta:* 28 cm.
Solução:



Base média $\Rightarrow \bar{MN} = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow \bar{MN} = \dfrac{12}{2} = 6\,cm$. Então, os demais lados serão:

$$\begin{aligned} \bar{QM} &= \frac{16}{2} = 8 \\ \bar{QP} &= \frac{12}{2} = 6 \\ \bar{NP} &= \frac{16}{2} = 8 \end{aligned}$$

Então, o perímetro do quadrilátero $MNPQ$ é dado por:

$$6 + 8 + 6 + 8 = 28\,cm$$