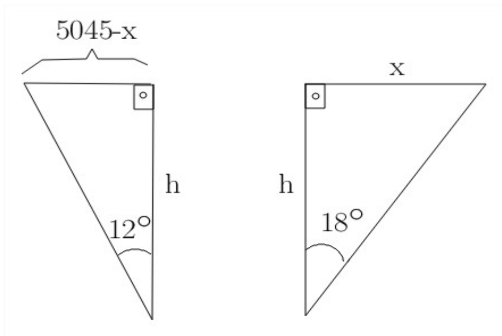
4º Jogo Concurso Online de Matemática PUC-Campinas

Gabarito - Segunda Fase-Nível A

1. *Resposta:* 9386 pés

   Solução:

   Podemos extrarir os seguintes dois triângulos retângulos de referência a partir do desenho do problema:



Aplicando a razão trigonométrica *tangente* aos dois triângulos retângulos, nós temos que:

$$\begin{cases} \text{tg}(12^\circ) = \dfrac{5045 - x}{h} & (I) \\ \text{tg}(18^\circ) = \dfrac{x}{h} & (II) \end{cases}$$

Segue da Equação I que:

$$h = \frac{5045 - x}{\text{tg}(12^\circ)} \qquad (III)$$

Segue da Equação II que:

$$h = \frac{x}{\text{tg}(18^\circ)} \qquad (IV)$$

Comparando as Equações III e IV, nós temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\text{tg}(18^\circ)} &= \frac{5045 - x}{\text{tg}(12^\circ)} \\
\frac{x}{\text{tg}(18^\circ)} &= \frac{5045}{\text{tg}(12^\circ)} - \frac{x}{\text{tg}(12^\circ)} \\
\Rightarrow \frac{x}{\text{tg}(18^\circ)} + \frac{x}{\text{tg}(12^\circ)} &= \frac{5045}{\text{tg}(12^\circ)} \\
x \cdot \left(\frac{1}{\text{tg}(18^\circ)} + \frac{1}{\text{tg}(12^\circ)} \right) &= \frac{5045}{\text{tg}(12^\circ)} \\
x \cdot \left(\frac{\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ)}{\text{tg}(18^\circ)\text{tg}(12^\circ)} \right) &= \frac{5045}{\text{tg}(12^\circ)} \\
x &= \frac{\dfrac{5045}{\text{tg}(12^\circ)}}{\dfrac{\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ)}{\text{tg}(18^\circ)\text{tg}(12^\circ)}} \\
x &= \frac{5045}{\text{tg}(\cancel{12^\circ})} \cdot \frac{\text{tg}(\cancel{12^\circ}) \cdot \text{tg}(18^\circ)}{(\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ))} \\
x &= \frac{5045 \cdot \text{tg}(18^\circ)}{\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ)} \qquad (V)
\end{aligned}
$$

Voltando V em IV, nós temos que:

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{\dfrac{5045 \cdot \text{tg}(18^\circ)}{\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ)}}{\text{tg}(18)^\circ} \\
&= \frac{5045 \cdot \text{tg}(18^\circ)}{(\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ))} \cdot \frac{1}{\text{tg}(18^\circ)} \\
&= \frac{5045}{\text{tg}(12^\circ) + \text{tg}(18^\circ)} \\
&= 9386,46 \Rightarrow h \approx 9386 \quad \text{metros}
\end{aligned}
$$

2. *Resposta: Alternativa* (b)

   Solução:

   As velocidades de correção dos corretores são dadas por:

$$
\begin{aligned}
v_{beatriz} &= \frac{5}{10}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \Rightarrow v_{beatriz} = \frac{1}{2}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \\
v_{alexan} &= \frac{3}{10}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \Rightarrow v_{alexan} = \frac{3}{10}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \\
v_{alex} &= \frac{2}{10}\frac{\text{provas}}{\text{min}} \Rightarrow v_{alex} = \frac{1}{5}\frac{\text{provas}}{\text{min}}
\end{aligned}
$$

   Vamos, inicialmente, determinar o tempo x o qual a Beatriz, que é a corretora mais rápida, dispende para corrigir 600 provas:

$$v_{beatriz} \cdot x = 600 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x = 600 \Rightarrow x = 1200 \quad \text{min}$$

   Vejamos agora quantas provas o Alexandre, que é o segundo corretor mais rápido, corrige em 1200 minutos.

   Em 1200, Alexandre corrige:

$$v_{alexandre} \cdot 1200 = \frac{3}{10} \cdot 1200 = 360 \ \text{provas}$$

   Desta forma, com respeito ao monte de provas do Alexandre, existem 240 provas para serem corrigidas por Alexandre e Beatriz em um certo tempo y que iremos determinar:

$$
\begin{aligned}
(v_{beatriz} + v_{alexan}) \cdot y &= 240\text{provas} \\
\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\right) y &= 240 \\
\frac{10+6}{20} \cdot y &= 240 \\
\frac{16}{20} \cdot y &= 240 \\
y &= \frac{240 \cdot 20}{16} \\
y &= 300 \ \text{min}
\end{aligned}
$$

   Então em $1200 + 300 = 1500 \quad$ min os corretores Beatriz e Alexandre corrigem as suas provas.

   Em 1500 minutos, Alex corrige:

$$v_{alex} \cdot 1500 = \frac{1}{5} \cdot 1500 = 300 \quad \text{provas}$$

Então, vejamos qual é o tempo z que os três corretores dispendem para corrigir as $600 - 300 = 300$ provas restantes do monte de Alex:

$$\begin{aligned}
(v_{beatriz} + v_{alexan} + v_{alex}) \cdot z &= 300 \\
\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5}\right) \cdot z &= 300 \\
\frac{5+3+2}{10} \cdot z &= 300 \\
\frac{10}{10} z &= 300 \\
z &= 300\text{min}
\end{aligned}$$

Então, o tempo total de correção será igual a:

$$\text{T}_{total} = 1500 + 300 = 1800\text{min} \Rightarrow \text{T}_{total} = 30\text{horas}$$

Considerando 12 horas por dia, teremos 2 dias mais 6 horas.

Como os corretores começaram a corrigir as provas na segunda-feira às 8h00, então terminaram a correção na quarta-feira, às 15h00 (contando com a paradinha para o almoço).

3. *Resposta:* 9 pessoas

   Solução:

   Para termos o menor número de pessoas a serem retiradas precisamos ter o menor número possível de Vascaínos ou Ibisenses em C. Desta forma contamos com 12 Motoclubenses mais 1 Vascaíno e dois Ibisenses ou 12Motoclubenses mais 1 Ibisense e 2 Vascainos.

   Sobra então em $U - C$:

   ou 9 ibisenses e 6 vascaínos

   ou 8 ibisenses e 7 vascaínos.

   Do primeiro conjunto teríamos que retirar com certeza pelo menos 10 pessoas. No segundo, pelo menos 9 pessoas.

4. *Questão Cancelada*
   (*Houve um equívoco na digitação do valor do percentual de desgaste do raio no enunciado da questão. De fato, era para ser considerado* $0,1\%$

   De toda a forma, encaminhamos abaixo a resolução considerando o percentual de desgaste de $0,1\%$.

   Solução:

   Se o pneu percorre 1000 Km, então:

$$\begin{aligned} \text{raio}_{desgast} &= R - 0,001R \\ &= R(1-0,001) \end{aligned}$$

   Se o pneu percorre 2×1000 Km, então:

$$\begin{aligned} \text{raio}_{desgast} &= R(1-0,001) - 0,001 \cdot R(1-0,001) \\ &= R(1-0,001)\cdot(1-0,001) \\ &= R(1-0,001)^2 \end{aligned}$$

   Se o pneu percorre $N \times 1000$ Km, então:

$$\text{raio}_{desgast} = R(1-0,001)^N$$

   Desejamos agora, para um raio R inicial $R = 50$. que:

$$\begin{aligned} R(1-0,001)^N &= 50 - 1,5 \\ 50(1-0,001)^N &= 48,5 \\ (1-0,001)^N &= \frac{48,5}{50} \end{aligned}$$

   Aplicando o logaritmo natural a ambos os membros da equação acima, nós temos que:

$$\text{Ln}(1-0,001)^N = \text{Ln}\left(\frac{48,5}{50}\right)$$

$$\begin{aligned} N \cdot \text{Ln}(1-0,001) &= \text{Ln}\left(\frac{48,5}{50}\right) \\ N &= \frac{\text{Ln}\left(\frac{48,5}{50}\right)}{\text{Ln}(1-0,001)} \\ N &= 30,443 \end{aligned}$$

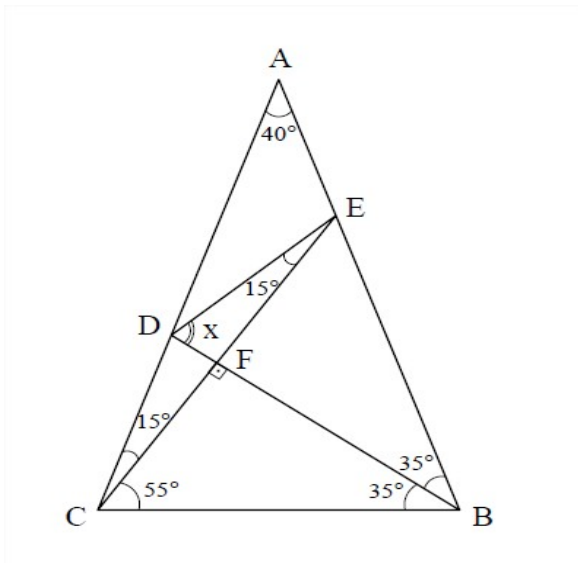
Logo, o desgaste se dará após:

$$N \cdot 1000 \ \text{km} = 30,443 \cdot 1000 \Rightarrow N \cdot 1000 \ \text{km} = 30443 \ \text{km}$$

5. *Resposta:* 75

   Solução:

   A partir do enunciado, nós consolidamos o seguinte desenho:



   Veja no triângulo ΔABC que $\hat{C} = \hat{B} = 70°$. Note que o triângulo ΔCBE é um triângulo isósceles, uma vez que a bissetriz $\bar{BF}$ corresponde a uma altura e, consequentemente, mediana ($\bar{CF} = \bar{FE}$). O triângulo ΔCDE é um triângulo isósceles, pois $\bar{DF}$ é altura e mediana. Desta forma, temos que $\hat{E} = 15°$. No triângulo ΔDEF, temos que
   $E\hat{D}F + 15° = 90° \Rightarrow E\hat{D}F = E\hat{D}B = 75°$.

6. *Resposta:* gráfico (a)
   Solução:

   Temos essencialmente quatro casos a considerar:

   caso (I): Se $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow |x| = x$ e $|y| = y$. Então substituindo estas constribuições na equação $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ nós temos que:

   $$(x-|x|)^2+(y-|y|)^2 = 4 \Rightarrow (x-x)^2+(y-y)^2 = 4 \Rightarrow 0^2+0^2 = 4 \Rightarrow 0 = 4 \Rightarrow \nexists \text{ solução.}$$

caso (II): Se $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow |x| = -x$ e $|y| = -y$. Então substituindo estas constribuições na equação $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ nós temos que:

$$(x-|x|)^2+(y-|y|)^2 = 4 \Rightarrow (x-(-x))^2+(y-(-y))^2 = 4 \Rightarrow (x+x)^2+(y+y)^2 = 2^2$$

Então,

$$\begin{aligned} (2x)^2 + (2y)^2 &= 4 \\ 4x^2 + 4y^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 1^2 \end{aligned}$$

Esta última equação é a equação de uma circunferência de raio 1, mas como $x < 0$ e $y < 0$, esta equação descreve os pontos que estão na curva referente a um quarto da circunferência, no terceiro quadrante.

caso (III): Se $x < 0$ e $y > 0 \Rightarrow |x| = -x$ e $|y| = y$. Então substituindo estas constribuições na equação $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ nós temos que:

$$(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4 \Rightarrow (x - (-x))^2 + (y - y)^2 = 4 \Rightarrow (2x)^2 = 4 \Rightarrow 4x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ (pois } x < 0)$$

Temos que os pontos (x, y), com $x = -1$ e $y > 0$ descrevem uma semi-reta vertical em $x = -1$ no segundo quadrante.

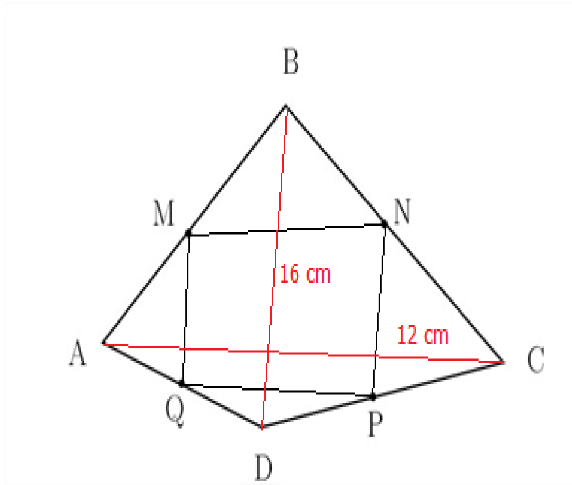
caso (IV): Se $x > 0$ e $y < 0 \Rightarrow |x| = x$ e $|y| = -y$. Então substituindo estas constribuições na equação $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ nós temos que:

$$(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4 \Rightarrow (x - x))^2 + (y - (-y))^2 = 4 \Rightarrow (2y)^2 = 4$$
$$\Rightarrow 4y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = -1 \text{ (pois } y < 0)$$

Temos que os pontos (x, y), com $y = -1$ e $x > 0$ descrevem uma semi-reta horizontal em $y = -1$ no quarto quadrante.

O conjunto solução então corresponde a união das soluções obtidas nos casos II, III e IV. Geometricamente este conjunto solução pode ser caracterizado pelo gráfico (a).

7. *Resposta:* 28 cm.
   Solução:



Base média $\Rightarrow \bar{MN} = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow \bar{MN} = \dfrac{12}{2} = 6\,cm$. Então, os demais lados serão:

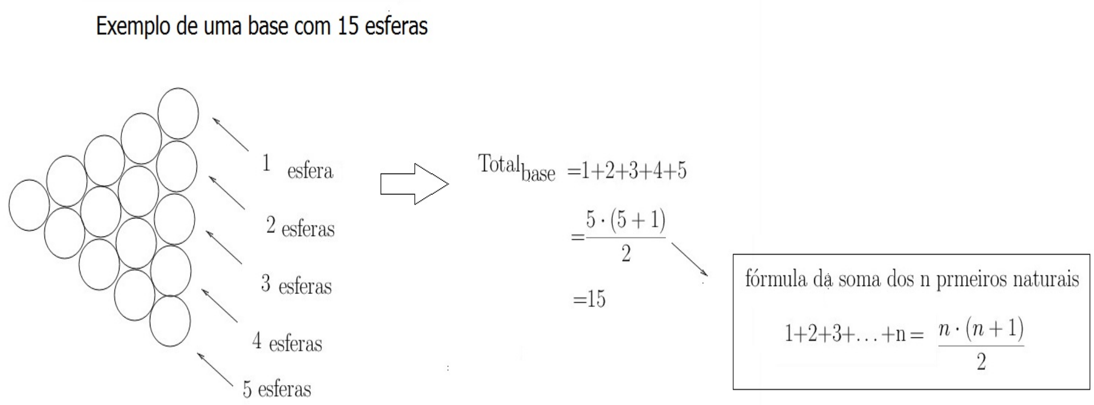
$$\begin{aligned} \bar{QM} &= \frac{16}{2} = 8 \\ \bar{QP} &= \frac{12}{2} = 6 \\ \bar{NP} &= \frac{16}{2} = 8 \end{aligned}$$

Então, o perímetro do quadrilátero $MNPQ$ é dado por:

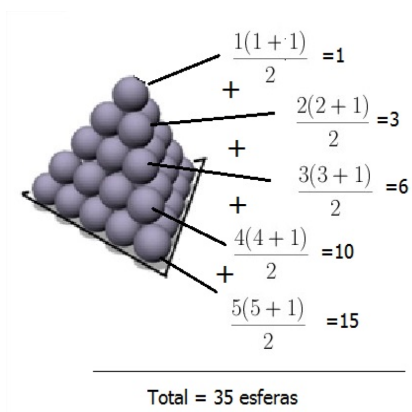
$$6 + 8 + 6 + 8 = 28\,cm$$

8. *Resposta:* 18
Solução:

O *exemplo simples* da figura nos dará uma boa intuição para resolver o problema. Vejamos como podemos contar o número de esferas de uma figura tetraétrica com base formada por 15 esferas.



Agora para contar o total de esferas da figura tetraédrica, basta percebermos que a lateral da base de cada nível tem uma esfera a menos que a lateral da base do nível abaixo. Desta forma, contamos o total de esferas por níveis.



Desta forma, os alunos deveriam promover estimativas para decidir qual seria o valor N de esferas na lateral da base inferior da figura tetraétrica para construir uma figura tetraédrica de 286 esferas no total.

A idéia era que a equipe se subdividisse para prospectar o possível valor de N, promovendo as contas na calculadora, obedecendo o padrão de conta, conforme o exemplo $N = 5$ que constroí uma figura tetraétrica com 35 esferas. Desta forma, a equipe poderia se subdividir para testar com diferentes valores de N e em pouco tempo poderiam concluir que o valor de N para construir uma figura tetraétrica de 286 esferas no total seria $N = 11$. Com efeito,

$$\frac{11\cdot 12}{2}+\frac{10\cdot 11}{2}+\frac{9\cdot 10}{2}+\ldots+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{1\cdot 2}{2}=286$$

Com um pouco mais de trabalho analítico, seria possível para a equipe obter um padrão de somas quadráticas, observando que:

$$\text{Total}= \underbrace{\frac{N(N+1)}{2}+\frac{(N-1)N}{2}}+\underbrace{\frac{(N-2)(N-1)}{2}+\frac{(N-3)(N-2)}{2}}+\ldots+\frac{1(1+1)}{2}$$

$$\underbrace{\frac{N(2N)}{2}}+\underbrace{\frac{(N-2)(2(N-2))}{2}}+\ldots+\frac{2(2\cdot 2)}{2}$$

$$N^2+(N\text{-}2)^2+\cdots+1^2$$

Ou seja,

$$\text{Total de esferas} = N^2+(N-2)^2+(N-4)^2+\ldots+1^2$$

Podemos começar com um número N qualquer. Por exemplo $N=5$. Teríamos $5^2+3^2+1^2=35$.

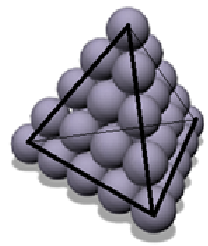
Portanto a equipe teria que se subdividir para prospectar possíveis valores para N:

$$\begin{aligned}7^2+5^2+3^2+1^2 &= 84\\ 9^2+7^2+5^2+3^2+1^2 &= 165\\ 11^2+9^2+7^2+5^2+3^2+1^2 &= 286\end{aligned}$$

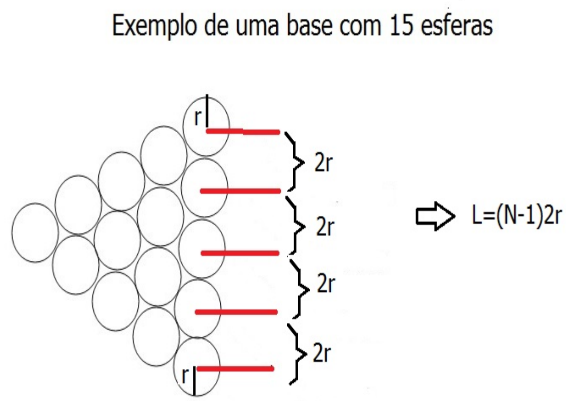
Já que a soma resulta em 286, temos $N=11$.

Agora precisamos determinar a altura da figura tetraétrica, para este caso, considerando a distância h da base (sob as esferas) ao cume da última esfera, considerando que cada esfera possui raio igual a 1.

Primeiramente, vamos considerar o tetraedro cujas arestas passam pelo centro das esferas das laterais da figura tetraédrica formado pelas esferas. Vejamos o exemplo com $N=5$, para entender o que acontece:



Agora para determinar o valor de uma aresta L do tetraedro, considerando a união dos centros das esferas de uma lateral da base, vamos recorrer ao exemplo simples para entender o que acontece:



Como a altura do tetraedro satisfaz a fórmula consolidada $H = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot L$, isto implica que a altura da figura tetraétrica será dada por:

$$h = H + 2r \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3}(N-1)2r + 2r$$

Como $N = 11$ e $r = 1$, então:

$$h = \frac{\sqrt{6}}{3}(11-1)2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 18,329 \Rightarrow h \approx 18$$

9. *Resposta: Alternativa* (a)
   Solução:

$$\begin{cases} 2^x \cdot a^y &= 8 \qquad (I) \\ cx + y &= 4 \qquad (II) \end{cases}$$

Segue da Equação I que:

$$\begin{aligned} 2^x \cdot a^y &= 8 \\ \Rightarrow 2^x \cdot a^y &= 2^3 \end{aligned}$$

Supondo que a é uma potência de 2, isto implica que $a = 2^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Voltando $a = 2^n$ na Equação I, temos que:

$$\begin{aligned} 2^x \cdot (2^n)^y &= 2^3 \\ 2^x \cdot 2^{n \cdot y} &= 2^3 \\ 2^{x+yn} &= 2^3 \end{aligned}$$

Comparando os expoentes na última equação, nós temos que:

$$x + ny = 3 \qquad (III)$$

Considere o sistema de equações formado pelas Equações II e III:

$$\begin{cases} x + ny &= 3 \\ cx + y &= 4 \end{cases}$$

Para que o sistema admita solução, é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja diferente de zero. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} 1 & n \\ c & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 1 - n \cdot c \neq 0 \Rightarrow c \neq \frac{1}{n}$$

10.

11. *Resposta: Alternativa* (c).
Solução:

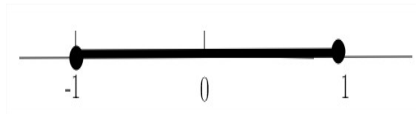
A alternativa (a) é falsa e para verificar este fato basta tomar o seguinte caso particular:

Tomando $a = 0$, $\varepsilon = 1$. Então, vejamos como fica definido o conjunto A para este caso.

$$A = \{x \in \mathbb{R} | \quad |x - 0| \leq 1\} \bigcap \{x \in \mathbb{R} | \quad |x - 0| \geq \frac{1}{3}\}$$

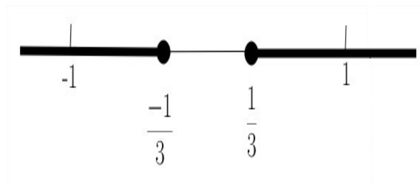
Veja que A é definido essencialmente como dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. De fato, vejamos o primeiro subconjunto:

$|x - 0| \leq 1$ é equivalente à $-1 \leq x \leq 1$. Podemos representá-lo na reta real:

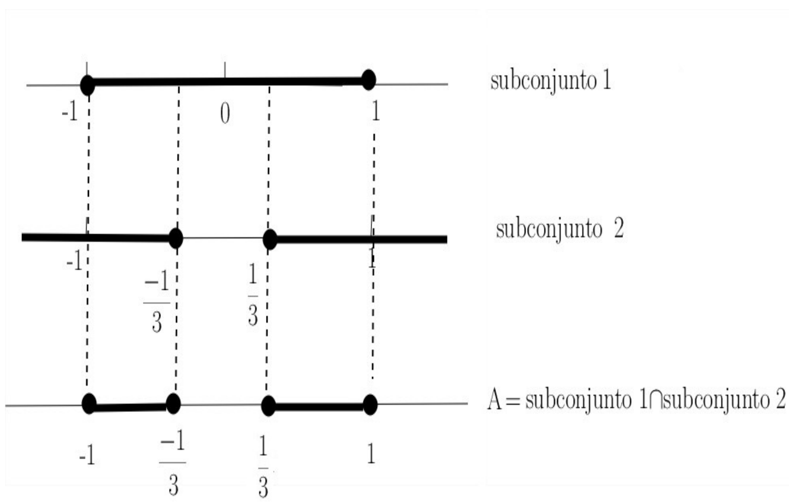


Com respeito ao segundo subconjunto, temos que:

$|x - 0| \geq \dfrac{1}{3}$ équivalente à $x \leq \dfrac{-1}{3}$ ou $x \geq \dfrac{1}{3}$. Também podemos representá-lo na reta real:



Promovendo a intersecção entre os conjuntos, nós teremos que:



Escolhendo $x = -1$, $y = 1$ e $\alpha = 0,5$, temos que como $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$, então:

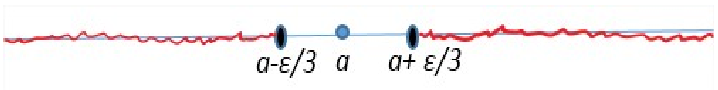
$$\begin{aligned} z &= 0,5 \cdot (-1) + (1 - 0,5) \cdot 1 \\ z &= -0,5 + 0,5 \\ z &= 0 \Rightarrow z \notin A \end{aligned}$$

A alternativa b também é incorreta e este exemplo mostra isto. Veja que se $|z| \leq a - \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$ $|z| \leq 0 - \dfrac{1}{3} \Rightarrow |z| \leq -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$ absurdo! Pois o módulo de um número é sempre maior do que qualquer número negativo. Vamos mostrar agora, de forma geral, que a alternativa (c) é a alternativa correta.

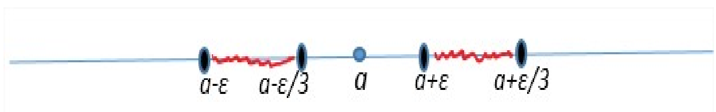
Considerando agora um a e um ε qualquer, temos que:

Para $|x-a| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x-a \leq \varepsilon \iff a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon$. Ou seja, x está entre $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$, ou x também pode assumir o valor das extremidades.

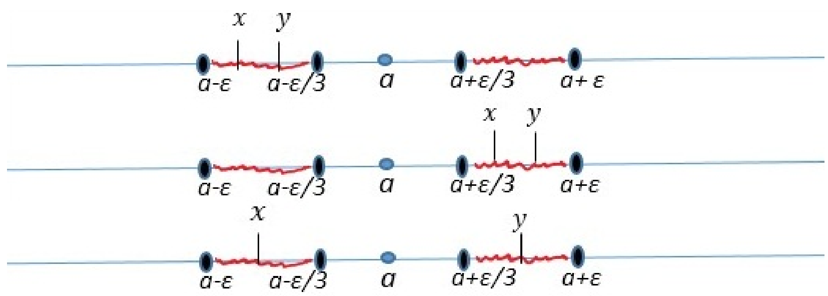
Para $|x-a| \geq \dfrac{\varepsilon}{3} \iff -\dfrac{\varepsilon}{3} \geq x-a$ ou $x-a \geq \dfrac{\varepsilon}{3} \iff a-\dfrac{\varepsilon}{3} \geq x$ ou $x \geq a+\dfrac{\varepsilon}{3}$.



Desta forma, para o conjunto A, a intersecção é dada abaixo:



Consideremos agora $x, y \in A$. Temos três possibilidades representadas abaixo ("*sem perda de generalidade, podemos considerar* $x < y$").



Temos agora que interpretar os elementos da forma $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, para $\alpha \in (0,1)$ (*aberto*). Se $\alpha = 0 \Rightarrow z = y$. Se $\alpha = 1 \Rightarrow z = x$.

Para $\alpha \in (0,1)$, os termos da forma $z = \alpha x + (1-\alpha)$ variam no segmento que une x à y. Nos dois primeiros casos acima, z estaria em A e portanto poderia pertencer à uma união de intervalos fechados, no entanto, no último caso, veja que z poderia assumir valores entre $a - \dfrac{\varepsilon}{3}$ e $a + \dfrac{\varepsilon}{3}$, e portanto, não pertenceria à união de dois intervalos fechados.

Como o menor valor que x pode assumir é $a-\varepsilon$ e o maior valor de y é $a+\varepsilon$, então os valores para z estão entre $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$, excluindo tais valores, pois lembre que $\alpha \in (0,1)$. Ou seja, certamente $z > a - \varepsilon$.