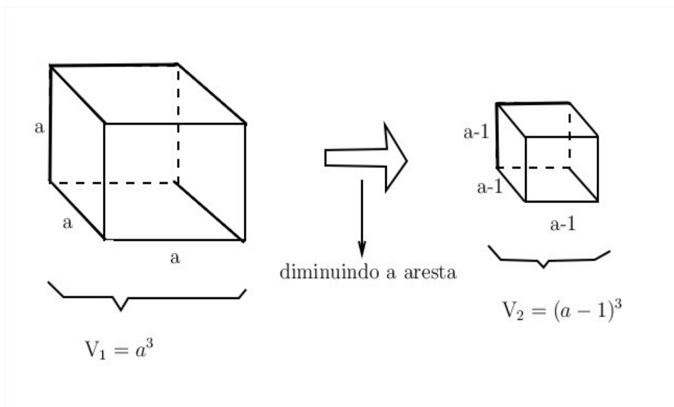
3º Jogo Concurso Online de Matemática PUC-Campinas

Gabarito - Segunda Fase-Nível B

1. *Resposta:* 68

   Solução:

   Considere a figura abaixo.



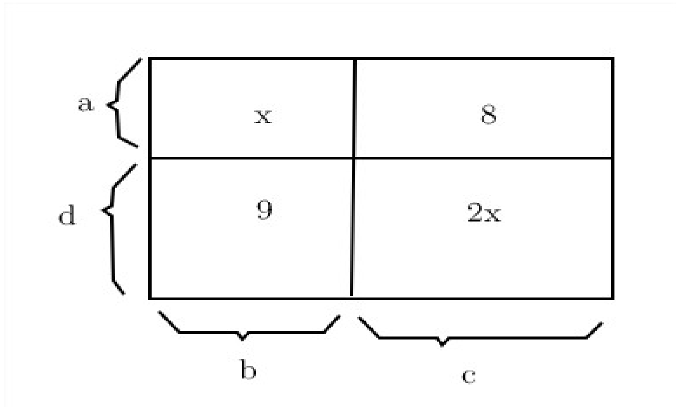
Ao diminuir cada aresta do cubo em uma unidade, temos que o volume diminui em 61 unidades. Então:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 - 61 \\ \Rightarrow (a-1)^3 &= a^3 - 61 \\ a^3 - 3a^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot a - 1^3 &= a^3 - 61 \\ \Rightarrow \cancel{a^3} - 3a^2 + 3a - 1 + 61 - a^3 &= 0 \\ \Rightarrow -3a^2 + 3a + 60 &= 0 \quad (\div -3) \\ \Rightarrow a^2 - a + 20 &= 0 \\ \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) & \\ &= 81 \end{aligned}$$

Então,

$$a = \frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} \Rightarrow a = 5$$

$$A_{\text{total}} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{\text{total}} = 6 \cdot 25 \Rightarrow A_{\text{total}} = 150$$



2. *Resposta:* $a = 6$
   Resolução:

   Temos que:

$$\begin{array}{rcll} a \cdot b & = & x & (I) \\ b \cdot d & = & 9 & (II) \\ a \cdot c & = & 8 & (III) \\ c \cdot d & = & 2x & (IV) \end{array}$$

   Dividindo as Equações I e II, nós temos que:

$$\frac{a}{d} = \frac{x}{9}$$

   Dividindo as Equações III e IV, nós temos que:

$$\frac{a}{d} = \frac{8}{2x}$$

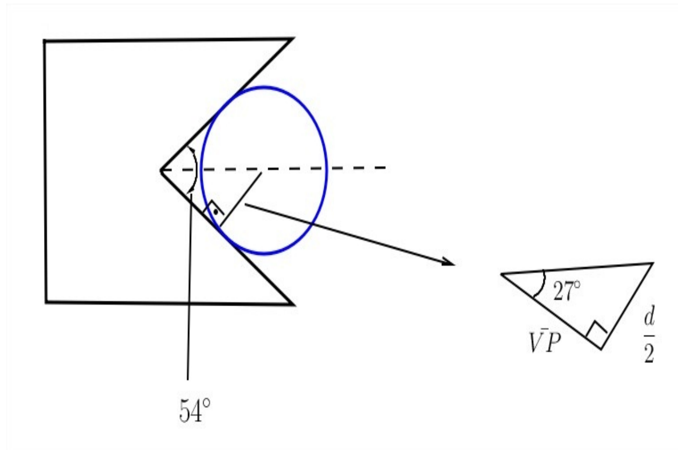
   Comparando as duas últimas equações, nós temos que:

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{9} & = & \frac{8}{2x} \\ \Rightarrow 2x^2 & = & 8 \cdot 9 \\ \Rightarrow x^2 & = & 36 \\ \Rightarrow x & = & 6 \end{array}$$

3. *Resposta:* $124°$

4. *Resposta:* 23

5. Considere o a vista lateral do desenho da situação, representada abaixo:



Aplicando a razão trigonométrica *tangente* ao triângulo destacado acima, nós temos que:

$$\underbrace{\text{tg}(27^\circ)}_{0.5095} = \frac{\frac{d}{2}}{\bar{V}P}$$

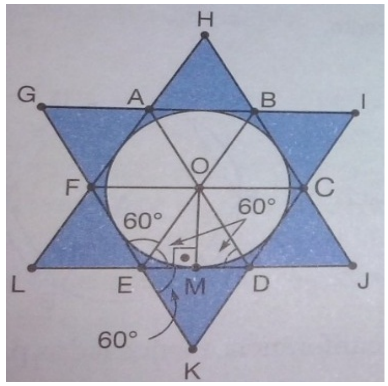
Como $\bar{V}P = 3.93$, então:

$$\begin{aligned} 0.5095 &= \frac{\frac{d}{2}}{3.93} \\ \Rightarrow 0.5095 \cdot 3.93 &= \frac{d}{2} \\ &\Rightarrow d = 2 \cdot 0.5095 \cdot 3.93 \\ &\Rightarrow d = 4.00467 \end{aligned}$$

Considerando o inteiro mais próximo, temos que $d = 4$.

6. A partir do enunciado e observando a figura abaixo, podemos verificar que existem 12 triângulos equiláteros, de lado 2cm. Sendo O o centro da circunferência de raio r, e considerando o triângulo retângulo ODM, teremos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(60^\circ) &= \frac{r}{2} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{r}{2} \Rightarrow r = \sqrt{3} \end{aligned}$$



A área da região sombreada em azul, solicitada, pode ser obtida pela diferença entre a área dos 12 triângulos equiláteros e a área do círculo de centro O e raio $\sqrt{3}$. Desta forma, temos que:

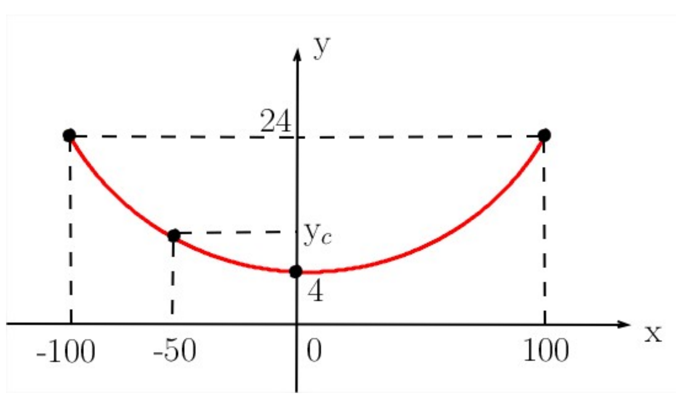
$$\begin{aligned} A_{\text{sombr}} &= 12 \cdot A_{\text{triang}} - A_{\text{circ}} \\ &= 12 \cdot \frac{2^{\sqrt{3}}}{4} - \pi(\sqrt{3})^2 \\ &= 12\sqrt{3} - 3\pi \end{aligned}$$

Fazendo a aproximação $\pi = 3$, nós temos que:

$$\begin{aligned} A_{\text{sombr}} &= 12\sqrt{3} - 3 \cdot 3 \\ A_{\text{sombr}} &= 3(4\sqrt{3} - 3) \ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

7. *Resposta:* 9 metros

   O gráfico abaixo representa matematicamente a situação.



O gráfico representa uma função do segundo grau. Temos que a expressão analítica que representa uma função de segundo grau é dada por:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (I)$$

Substituindo o ponto $(x, y) = (0, 4)$ na Equação I, nós temos que:

$$\begin{aligned} 4 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 4 &= c \Rightarrow c = 4 \end{aligned}$$

Agora, vamos substituir o ponto $(x, y) = (100, 24)$ na Equação I:

$$24 = a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + 4 \qquad (II)$$

Substituindo o ponto $(x, y) = (-100, 24)$ na Equação I, nós temos que:

$$24 = a \cdot 100^2 + b \cdot (-100) + 4 \qquad (III)$$

Comparando as Equações (II) e (III), nós temos que:

$$\begin{aligned} 100^2a + 100b + 4 &= (-100)^2 - 100b + 4 \\ \Rightarrow 10^4a + 100b + 4 &= 10^4a - 100b + 4 \\ \Rightarrow 200b &= 0 \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

Voltando as constantes $c = 4$ e $b = 0$ na Equação (I), temos que:

$$y = ax^2 + 4$$

Substituindo o ponto $(x, y) = (100, 24)$ na equação acima, nós temos que:

$$\begin{aligned} 24 &= a100^2 + 4 \\ 24 - 4 &= a \cdot 10^4 \\ 20 &= a \cdot 10^4 \\ \frac{20}{10^4} &= a \Rightarrow a = 2 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Voltando $a = 2 \cdot 10^{-3}$ em $y = ax^2 + 4$, nós temos que:

$$y = (2 \cdot 10^{-3})x^2 + 4$$

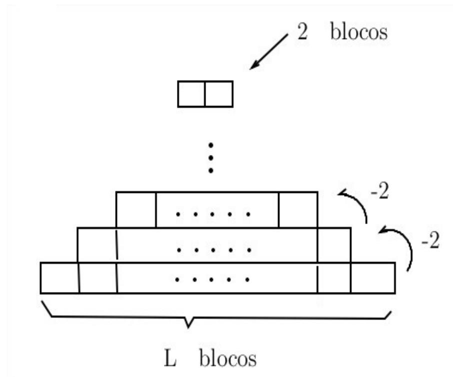
Substituinto o ponto $(x, y) = (-50, y_c)$ na equação acima, nós temos que:

$$\begin{aligned} y_c &= (2 \cdot 10^{-3}) \cdot (-50)^2 + 4 \\ y_c &= 2 \cdot 10^{-3} \cdot (-5 \cdot 10)^2 + 4 \\ y_c &= 2 \cdot 10^{-3} \cdot (-5)^2 \cdot 10^2 + 4 \\ y_c &= 5 + 4 \\ y_c &= 9 \text{ metros} \end{aligned}$$

8. *Resposta:* 196 blocos

   Resolução:

   A figura abaixo representa um esboço da vista lateral da construção piramidal.



Em uma lateral da base, temos L blocos, e vamos sempre retirando dois blocos das extremidades, à medida em que subimos um patamar. Como o primeiro patamar tem L blocos, ao subir 6 patamares, iremos ter retirado $2 \cdot 6$ blocos e teremos apenas dois blocos no último patamar, ou seja:

$$L - 6 \cdot 2 = 2 \Rightarrow L = 14$$

Desta forma, temos 14 blocos em uma lateral da base. Seja a_n o número de blocos no n-ésimo patamar de uma lateral da construção piramidal. Então, temos que:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 14 \\
a_2 &= 14 - 2 \\
a_3 &= (14 - 2) - 2 \Rightarrow a_3 = 14 - (3 - 1) \cdot 2 \\
a_4 &= ((14 - 2) - 2) - 2 \Rightarrow a_4 = 14 \cdot (4 - 1) \cdot 2 \\
\vdots & \quad \vdots \\
a_n &= 14 - (n - 1) \cdot 2
\end{aligned}$$

Observe que o termo geral da sequência acima diz respeito ao termo geral de uma progressão aritmética de raão -2. Vamos calcular a soma dos blocos de uma lateral, utilizando a fórmula consolidada de soma dos termos de uma PA ($S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$):

$$\begin{aligned}
S_7 &= \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 \\
S_7 &= \frac{(14 + 2) \cdot 7}{2} \\
S_7 &= 56
\end{aligned}$$

Para obter o total de blocos da construção piramidal, precisamos multiplicar o resultado obtido por 4, ou seja, $4 \cdot S_7$, e devemos subtrair 7 vezes 4 blocos, uma vez que ao subir cada patamar, estamos contando duas vezes cada bloco da extremidade. Logo, teremos que:

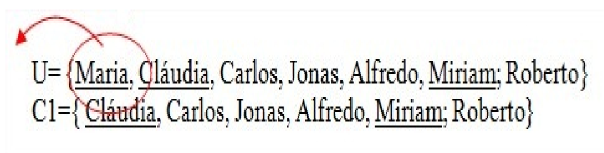
$$\begin{aligned}\text{Total de blocos} &= 4 \cdot S_7 - 4 \cdot 7 \\ &= 4 \cdot 56 - 28 \\ &= 224 - 28 \\ &= 196 \quad \text{blocos}\end{aligned}$$

9. *Alternativa* d.

   Resolução:

   Podemos ter 7 possíveis conjuntos com 6 pessoas (basta pensar na pessoa de U não incluída nele). Como temos 3 mulheres no UNIVERSO, 3 destes conjuntos terão 2 mulheres (quando a excluída for mulher) e os outros 4 (quando a pessoa excluída for homem) com três mulheres.

   Por exemplo: Considerando os conjuntos com 6 pessoas sendo 2 mulheres teremos de fazer



   5 retiradas para garantir que teríamos COM CERTEZA 1 mulher retirada, ao passo que para os conjunto com 6 pessoas teríamos de retirar 4 pessoas. Logo, na pior das hipóteses teremos de retirar 5 pessoas.

10. Resposta: *Alternativa* d