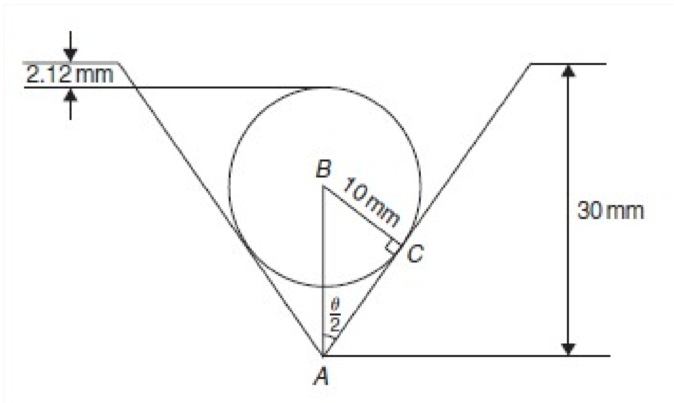
$3^{\underline{o}}$ Jogo Concurso Online de Matemática PUC-Campinas

Gabarito - Segunda Fase-Nível A

1. *Resposta:* 68

   Solução:

   Considere a figura abaixo.

   Temos que $\bar{BC} = 10$ e $\bar{BC}$ corresponde ao raio da circunferência. Temos que $\bar{AB} = 30 - 10 - 2.12 = 17.88\ mm$, pela figura. Então $\text{sen}(\frac{\theta}{2}) = \frac{10}{17.88}$.

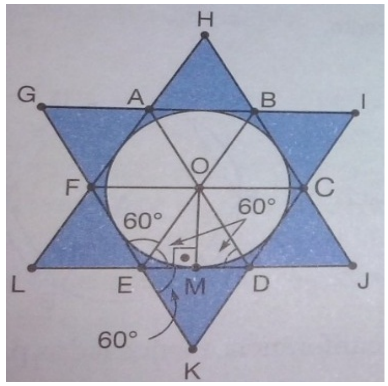
   Isto implica que $\frac{\theta}{2} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{10}{17.88}\right) = 34°$.

   Então, $\theta = 68°$.

2. A partir do enunciado e observando a figura abaixo, podemos verificar que existem 12 triângulos equiláteros, de lado 2cm. Sendo O o centro da circunferência de raio r, e considerando o triângulo retângulo ODM, teremos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(60°) &= \frac{r}{2} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{r}{2} \Rightarrow r = \sqrt{3} \end{aligned}$$

   A área da região sombreada em azul, solicitada, pode ser obtida pela diferença entre a área dos 12 triângulos equiláteros e a área do círculo de centro O e raio $\sqrt{3}$. Desta forma, temos que:

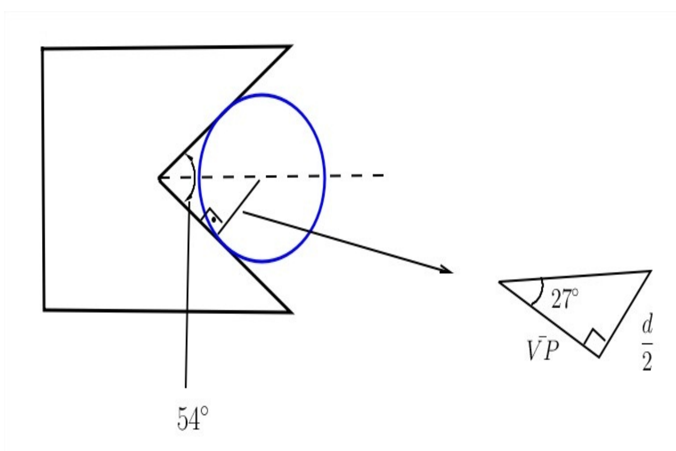


$$
\begin{aligned}
A_{\text{sombr}} &= 12 \cdot A_{\text{triang}} - A_{\text{circ}} \\
&= 12 \cdot \frac{2^{\sqrt{3}}}{4} - \pi(\sqrt{3})^2 \\
&= 12\sqrt{3} - 3\pi
\end{aligned}
$$

Fazendo a aproximação $\pi = 3$, nós temos que:

$$
\begin{aligned}
A_{\text{sombr}} &= 12\sqrt{3} - 3 \cdot 3 \\
A_{\text{sombr}} &= 3(4\sqrt{3} - 3)\ \text{cm}^2
\end{aligned}
$$

3. Considere o a vista lateral do desenho da situação, representada abaixo:



Aplicando a razão trigonométrica *tangente* ao triângulo destacado acima, nós temos que:

$$
\underbrace{\text{tg}(27°)}_{0.5095} = \frac{\frac{d}{2}}{\bar{VP}}
$$

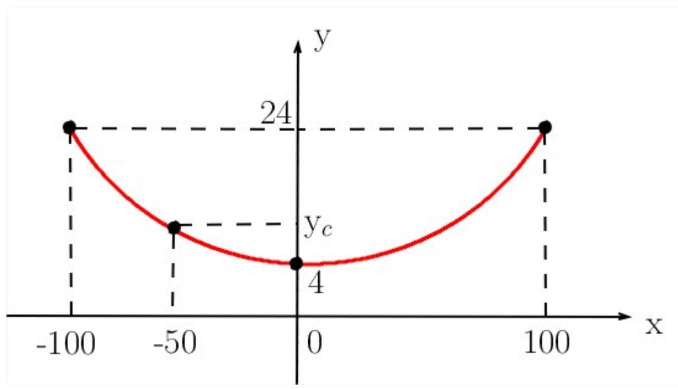
Como $\bar{VP} = 3.93$, então:

$$\begin{aligned} 0.5095 &= \frac{\frac{d}{2}}{3.93} \\ \Rightarrow 0.5095 \cdot 3.93 &= \frac{d}{2} \\ &\Rightarrow d = 2 \cdot 0.5095 \cdot 3.93 \\ &\Rightarrow d = 4.00467 \end{aligned}$$

Considerando o inteiro mais próximo, temos que $d = 4$.

4. *Resposta:* 9 metros

O gráfico abaixo representa matematicamente a situação.



O gráfico representa uma função do segundo grau. Temos que a expressão analítica que representa uma função de segundo grau é dada por:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (I)$$

Substituindo o ponto $(x, y) = (0, 4)$ na Equação I, nós temos que:

$$\begin{aligned} 4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 4 &= c \Rightarrow c = 4 \end{aligned}$$

Agora, vamos substituir o ponto $(x, y) = (100, 24)$ na Equação I:

$$24 = a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + 4 \qquad (II)$$

Substituindo o ponto $(x, y) = (-100, 24)$ na Equação I, nós temos que:

$$24 = a \cdot 100^2 + b \cdot (-100) + 4 \qquad (III)$$

Comparando as Equações (II) e (III), nós temos que:

$$
\begin{aligned}
100^2a+100b+4=(-100)^2-100b+4 \\
\Rightarrow 10^4a+100b+4 &= 10^4a-100b+4 \\
\Rightarrow 200b &= 0 \Rightarrow b=0
\end{aligned}
$$

Voltando as constantes $c=4$ e $b=0$ na Equação (I), temos que:

$$y=ax^2+4$$

Substituindo o ponto $(x,y)=(100,24)$ na equação acima, nós temos que:

$$
\begin{aligned}
24 &= a100^2+4 \\
24-4 &= a\cdot 10^4 \\
20 &= a\cdot 10^4 \\
\frac{20}{10^4}=a\Rightarrow {\color{red}a=2\cdot 10^{-3}}
\end{aligned}
$$

Voltando $a=2\cdot 10^{-3}$ em $y=ax^2+4$, nós temos que:

$$y=(2\cdot 10^{-3})x^2+4$$

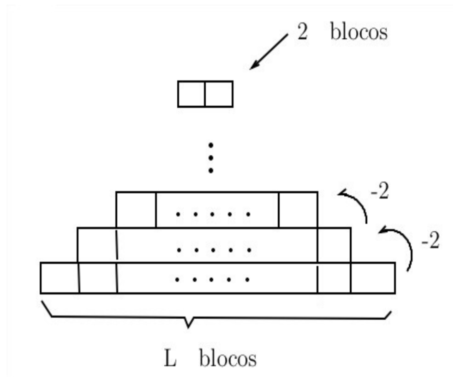
Substituinto o ponto $(x,y)=(-50,y_c)$ na equação acima, nós temos que:

$$
\begin{aligned}
y_c &= (2\cdot 10^{-3})\cdot(-50)^2+4 \\
y_c &= 2\cdot 10^{-3}\cdot(-5\cdot 10)^2+4 \\
y_c &= 2\cdot 10^{-3}\cdot(-5)^2\cdot 10^2+4 \\
y_c &= 5+4 \\
y_c &= 9 \ \text{ metros}
\end{aligned}
$$

5. *Resposta:* 196 blocos

   Resolução:

   A figura abaixo representa um esboço da vista lateral da construção piramidal.



Em uma lateral da base, temos L blocos, e vamos sempre retirando dois blocos das extremidades, à medida em que subimos um patamar. Como o primeiro patamar tem L blocos, ao subir 6 patamares, iremos ter retirado $2 \cdot 6$ blocos e teremos apenas dois blocos no último patamar, ou seja:

$$L - 6 \cdot 2 = 2 \Rightarrow L = 14$$

Desta forma, temos 14 blocos em uma lateral da base. Seja a_n o número de blocos no n-ésimo patamar de uma lateral da construção piramidal. Então, temos que:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 14 \\
a_2 &= 14 - 2 \\
a_3 &= (14-2) - 2 \Rightarrow a_3 = 14 - (3-1) \cdot 2 \\
a_4 &= ((14-2)-2) - 2 \Rightarrow a_4 = 14 \cdot (4-1) \cdot 2 \\
\vdots &\quad \vdots \\
a_n &= 14 - (n-1) \cdot 2
\end{aligned}$$

Observe que o termo geral da sequência acima diz respeito ao termo geral de uma progressão aritmética de raão -2. Vamos calcular a soma dos blocos de uma lateral, utilizando a fórmula consolidada de soma dos termos de uma PA ($S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$):

$$\begin{aligned}
S_7 &= \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 \\
S_7 &= \frac{(14+2) \cdot 7}{2} \\
S_7 &= 56
\end{aligned}$$

Para obter o total de blocos da construção piramidal, precisamos multiplicar o resultado obtido por 4, ou seja, $4 \cdot S_7$, e devemos subtrair 7 vezes 4 blocos, uma vez que ao subir cada patamar, estamos contando duas vezes cada bloco da extremidade. Logo, teremos que:

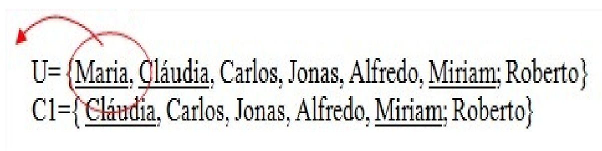
$$\begin{aligned}
\text{Total de blocos} &= 4 \cdot S_7 - 4 \cdot 7 \\
&= 4 \cdot 56 - 28 \\
&= 224 - 28 \\
&= 196 \quad \text{blocos}
\end{aligned}$$

6. *Alternativa* d.

   Resolução:

   Podemos ter 7 possíveis conjuntos com 6 pessoas (basta pensar na pessoa de U não incluída nele). Como temos 3 mulheres no UNIVERSO, 3 destes conjuntos terão 2 mulheres (quando a excluída for mulher) e os outros 4 (quando a pessoa excluída for homem) com três mulheres.

   Por exemplo: Considerando os conjuntos com 6 pessoas sendo 2 mulheres teremos de fazer



   5 retiradas para garantir que teríamos COM CERTEZA 1 mulher retirada, ao passo que para os conjunto com 6 pessoas teríamos de retirar 4 pessoas. Logo, na pior das hipóteses teremos de retirar 5 pessoas.

7. Resposta: *Alternativa* d

8. *Questão anulada*

9. Resposta: *Alternativa* b

10. No tempo $t = 0$, temos que $Q(0) = Q_0$. Impondo esta condição sobre o modelo $Q(t) = C\mathrm{e}^{kt}$, nós temos que:

$$\begin{aligned}
Q_0 &= C\mathrm{e}^{k \cdot 0} \\
Q_0 &= C \cdot 1 \Rightarrow C = Q_0
\end{aligned}$$

   Voltando $C = Q_0$ em $Q(t) = C\mathrm{e}^{kt}$, temos que:

$$Q(t) = Q_0\mathrm{e}^{kt} \qquad (I)$$

Seja T o tempo da *meia-vida*. Ou seja, é o tempo para o carbono existente no fóssil se reduzir à *metade* da quantidade inicial. Em termos matemáticos, temos que:

$$Q_T = \frac{Q_0}{2}$$

Impondo esta condição sobre a Equação I, nós temos que:

$$\begin{aligned}
\underbrace{Q(T)}_{\frac{Q_0}{2}} &= Q_0 \cdot \mathrm{e}^{kT} \\
\frac{1}{2} \cdot \cancel{Q_0} &= \cancel{Q_0} \cdot \mathrm{e}^{kT} \\
\Rightarrow \frac{1}{2} &= \mathrm{e}^{kT} \\
\Rightarrow \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) &= \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{kt}) \\
\mathrm{Ln}(2^{-1}) &= kT \cdot \mathrm{Ln}(\mathrm{e}) \quad \text{(Aplicando logaritmo em ambos os lados)} \\
-\mathrm{Ln}(2) &= kT \cdot 1 \Rightarrow k = \frac{-\mathrm{Ln}(2)}{T} \quad (II)
\end{aligned}$$

Voltando II em I, nós temos que:

$$\begin{aligned}
Q(t) &= Q_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{Ln}(2)}{T} \cdot t} \\
Q(t) &= Q_0 \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{Ln}(2^{-1})}\right)^{\frac{t}{T}} \\
Q(t) &= Q_0 (2^{-1})^{\frac{t}{T}} \\
Q(t) &= Q_0 2^{\frac{-t}{T}} \qquad (III)
\end{aligned}$$

Como a o tempo de *meia-vida* do Carbono C^{14} é $T = 5600$, então:

$$Q(t) = Q_0 2^{\frac{-t}{5600}} \qquad (IV)$$

Impondo a condição de que, em um osso fossilizado, foi encontrado um milésimo da quantidade original do C^{14}, na Equação IV, nós temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1000} \cdot Q_0 &= Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5600}} \\
\frac{1}{1000} \cdot \cancel{Q_0} &= \cancel{Q_0} \cdot 2^{\frac{-t}{5600}}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
2^{\frac{-t}{5600}} &= \frac{1}{1000} \\
\mathrm{Ln}(2^{\frac{-t}{5600}}) &= \mathrm{Ln}(1000^{-1}) \\
\frac{-t}{5600}\mathrm{Ln}(2) &= -\mathrm{Ln}(1000) \\
\Rightarrow t &= \frac{5600 \cdot \mathrm{Ln}(1000)}{\mathrm{Ln}(2)} \Rightarrow t = 55.808,39 \Rightarrow \approx 55808 \quad \text{anos}
\end{aligned}$$