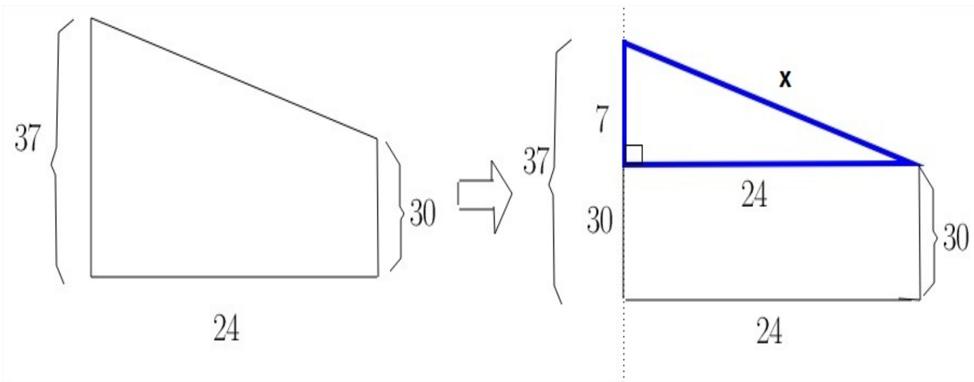
$2^{\underline{o}}$ Jogo Concurso Online de Matemática PUC-Campinas

Gabarito - Segunda Fase (Nível B)

1. *Resp:* 25 metros

   Sol.

   Considere a seguinte figura geométrica que representa a situação do enunciado do problema:



   Aplicando o *Teorema de Pitágoras* ao triângulo de cor azul da figura, temos que:

$$\begin{aligned} x^2 &= 7^2 + 24^2 \\ &= 49 + 576 \\ &= 625 \Rightarrow x = \sqrt{625} \Rightarrow x = 25 \text{ metros} \end{aligned}$$

2. *Resp:* 36

   Sol.

   Vamos somar 2 ao valor de y:

   (I)

$$\begin{aligned} y\text{novo} &= 5 \cdot 3^{x+2} \\ &= 5 \cdot 3^{x} \cdot 3^2 \quad \text{(propriedade de potenciação)} \\ &= 5 \cdot 3^{x} \cdot 9 \\ &= 9 \cdot \underbrace{(5 \cdot 3^{x})}_{y} \quad \text{(propriedade associativa da multiplicação)} \\ &= {\color{blue}9} \cdot y \end{aligned}$$

   Então, somar 2 ao valor de x implica em multiplicar o valor de y por 9.

(II) Vamos subtrair 3 ao valor de x:

$$
\begin{aligned}
y\text{novo} &= 5 \cdot 3^{x-3} \\
&= 5 \cdot 3^{x} \cdot 3^{-3} \quad \text{(propriedade de potenciação)} \\
&= 5 \cdot 3^{x} \cdot \frac{1}{3^3} \\
&= 5 \cdot 3^{x} \cdot \frac{1}{27} \\
&= \frac{5 \cdot 3^{x}}{27} \\
&= \frac{y}{27}
\end{aligned}
$$

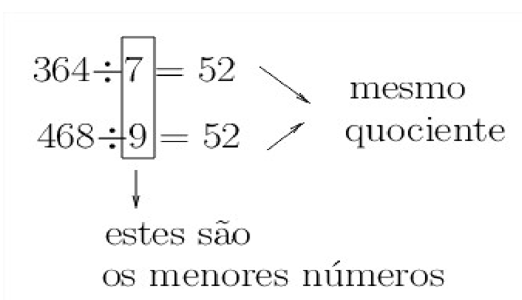
Então subtrair 3 ao valor de x implica em dividir o valor de y por 27. Somando os valores obtidos em (I) e (II), nós temos que:

$$(I) + (II) = 9 + 27 = 36$$

3. Primeiramente vejamos quem é o máximo divisor comum entre 364 e 468:

	1	3	2
468	364	104	52
104	52	0	

Como 52 é o $mdc(364, 468)$, como $364 = 52 \cdot 7$ e $468 = 52 \cdot 9$ então temos que:

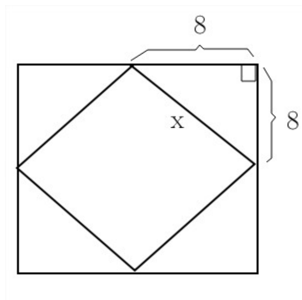


4. *Resp:* 254

   Sol. Seja A_1 a área do quadrado grande. Temos que:

$$\begin{aligned} A_1 &= 16^2 \\ &= 256 \end{aligned}$$

   Vamos calcular o lado do primeiro quadrado inscrito, para então depois calcularmos a área do primeiro quadrado inscrito. Considere o desenho abaixo:



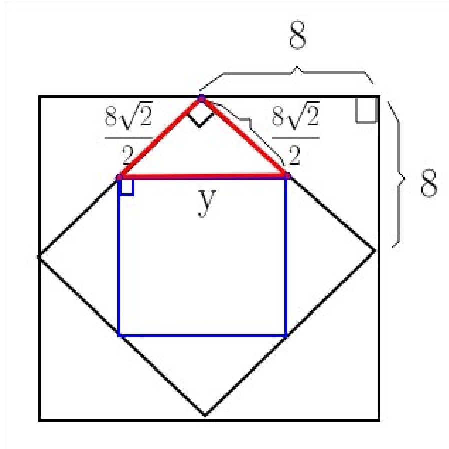
   Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo destacado no canto superior da figura, temos que:

$$\begin{aligned} x^2 &= 8^2 + 8^2 \\ &= 64 + 64 \\ &= 128 \Rightarrow x = \sqrt{128} \end{aligned}$$

   Então a área do primeiro quadrado inscrito é dada por:

$$A_2 = (\sqrt{128})^2 \Rightarrow A_2 = 128$$

Para calcular a área do segundo quadrado inscrito, precisamos determinar o valor do lado deste quadrado. Considere a figura abaixo:



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo vermelho da figura, temos que:

$$\begin{aligned} y^2 &= \left(\frac{8\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{64 \cdot 2}{4} + \frac{64 \cdot 2}{4} \\ &= 32 + 32 \\ &= 64 \Rightarrow y = 8 \end{aligned}$$

Então a área do segundo quadrado inscrito (em azul) é dada por:

$$A_3 = 8^2 \Rightarrow A_3 = 64$$

Generalizando, temos que:

$$\begin{aligned} A_1 &= 256 \\ A_2 &= 128 = \frac{256}{2^1} = \frac{256}{2^{2-1}} \\ A_3 &= 64 = \frac{256}{4} = \frac{256}{2^2} = \frac{256}{2^{3-1}} \\ \vdots &= \vdots \\ A_n &= \frac{256}{2^{n-1}} \quad \text{(área do n-ésimo quadrado)} \end{aligned}$$

Então a soma das áreas dos 7 primeiros quadrados inscritos é igual:

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_8) - A_1 = A_2 + A_3 + \ldots + A_8$$

Ou seja, a soma dos 7 primeiros quadrados inscritos será dada por:

$$\begin{aligned} A_2 + A_3 + \ldots + A_8 &= \frac{256}{2^{2-1}} + \frac{256}{2^{3-1}} + \ldots + \frac{256}{2^{8-1}} \\ &= \frac{256}{2} + \frac{256}{2^2} + \ldots + \frac{256}{2^7} \end{aligned}$$

O problema se reduziu a calcular a soma de uma progressão geométrica de 7 termos e razão $q = \frac{1}{2}$. Como $S = \dfrac{a_1(1-q^7)}{1-q}$, então:

$$\begin{aligned} S &= \frac{128(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 254 \end{aligned}$$

5. *Resp:* 7

   Sol.

   Seja $n = ab$ o número de dois dígitos. Seja $\bar{n} = ab6$ o número transformado.

   Pelas informações do enunciado do problema, nós temos que:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= n + 636 \\ ab6 &= ab + 636 \end{aligned}$$

   Usando o sistema de representação na base 10, nós temos que:

$$\begin{aligned} ab6 &= ab + 636 \\ \Rightarrow a \cdot 100 + b \cdot 10 + 6 &= a \cdot 10 + b + 636 \\ \underbrace{(a \cdot 100 - a \cdot 10)}_{90a} + \underbrace{(b \cdot 10 - b)}_{9b} &= 636 - 6 \\ \Rightarrow 90a + 9b &= 630 \quad (\div 9) \\ 10a + b &= 70 \end{aligned}$$

   A solução da equação acima é $a = 7$ e $b = 0$. Isto implica que $a + b = 7 + 0 = 7$

6. *Resp: Alternativa* d

Sol.

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x+y \\ \Rightarrow x^2-x+y^2-y &= 0 \\ \Rightarrow (x^2-x)+(y^2-y) &= 0 \end{aligned}$$

Completando quadrado temos que:

$$\begin{aligned} \left(x^2-\frac{2}{2}x\right)+\left(y^2-\frac{2}{2}y\right) &= 0 \\ \left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\left(y^2-2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) &= 0 \\ \underbrace{\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}_{(x-\frac{1}{2})^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\underbrace{\left(y^2-2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}_{(y-\frac{1}{2})^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} &= 0 \\ \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 &= \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \qquad (*) \end{aligned}$$

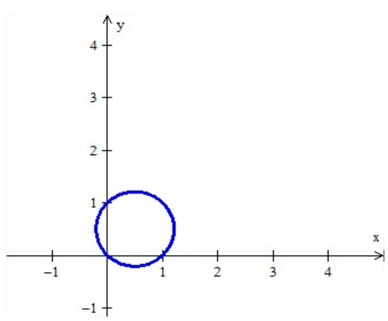


Figure 1:
Circunferência de centro $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e raio $\sqrt{\frac{1}{2}}$

Ou seja, infinitos pontos pertencentes à circunferência dada pela equação $(*)$ satisfazem a equação inicial dada. Logo, existem infinitas soluções.

7. *Resp:* 33

$$\begin{aligned}
2+xy+2x+y &= 155 \\
2+2x+xy+y &= 155 \quad \text{(reorganizando a soma)} \\
2(1+x)+y(x+1) &= 155 \quad \text{(fatorando)} \\
(1+x)(2+y) &= 155 \quad \text{(fatorando novamente)} \\
(1+x)(2+y) &= 155 \\
(1+x)(2+y) &= 31 \cdot 5
\end{aligned}$$

Analisando casos:

(i) Se $1+x=31$ e $2+y=5$.

$$\Rightarrow x=30\; y=3 \Rightarrow x+y=33$$

(i) Se $1+x=5$ e $2+y=31$.

$$\Rightarrow x=4\; y=29 \Rightarrow x+y=33$$

8. Resp: 52

$$-25+(-24)+\ldots+?=26$$

O problema consiste essencialmente em resolver uma soma aritmética de razão 1. Então:

$$a_1=-25,\; r=1,\; a_n=-25+1(n-1)$$

Como a soma de uma progressão aritmética é dada por:

$$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2},$$

então, temos que:

$$26 \quad = \quad \frac{(-25+(-25+(n-1)))n}{2} \qquad (*)$$

Resolvendo a equação quadrática $(*)$ para n, temos que:

$$n=52$$

9. *Resp:* 76

   Sol.

   Sejam

   $p =$ número de alunos por van

   $q =$ número de alunos por ônibus

   Usando as informações do enunciado do problema, temos que:

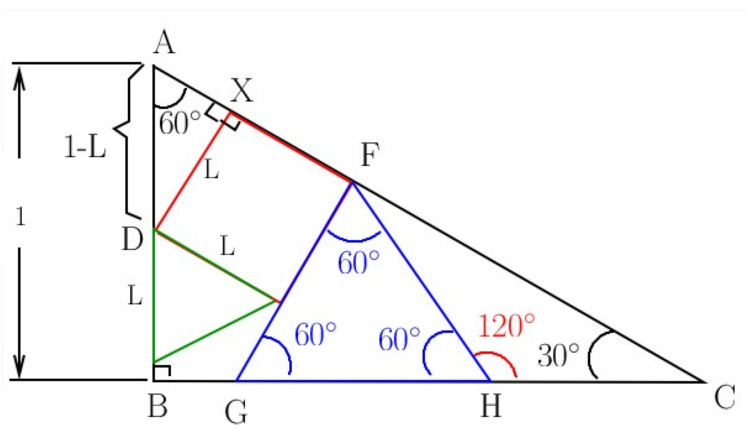
$$\begin{aligned} 16p + 8q &= 752 \\ 5p + 5q &= 380 \end{aligned}$$

   Resolvendo o sistema linear acima, chega-se a

$$p = 18 \quad \text{e} \quad q = 58 \Rightarrow p + q = 18 + 58 = 76$$

10. *Resp:* 3

    Considere o desenho da figura abaixo. Como o triângulo ΔFGH é equilátero, então todos os seus ângulos internos são iguais a $60°$. Como o triângulo ΔFGC é um triângulo retângulo, isto implica que o ângulo $G\hat{C}F$ igual a $30°$ por propriedades de ângulos complementares. Como o complementar de $30°$ é $60°$, então o ângulo com respeito ao vértice A é igual a $60°$.



    Vamos empregar uma trigonometria no triângulo ΔADX:

$$\begin{aligned} \text{sen}(60°) &= \frac{l}{1-l} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{l}{1-l} \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da equação acima ao quadrado.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{l}{1-l}\right)^2 \\
\frac{3}{4} &= \frac{l^2}{(1-l)^2} \\
\Rightarrow 3(1-l)^2 &= 4l^2 \\
\Rightarrow 3(1^2-2l+l^2) &= 4l^2 \\
-l^2+6l-3 &= 0
\end{aligned}$$

Cálculo do delta:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 36-4\cdot(-1)\cdot(-3) \\
&= 36+12 \\
&= 48
\end{aligned}$$

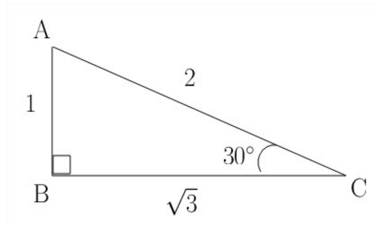
Raízes:

$$\begin{aligned}
l &= \frac{-6\pm\sqrt{48}}{2\cdot 1} \\
&= \frac{-6\pm 4\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{2(-3\pm 2\sqrt{3})}{2} \\
&= 2\sqrt{3}-3
\end{aligned}$$

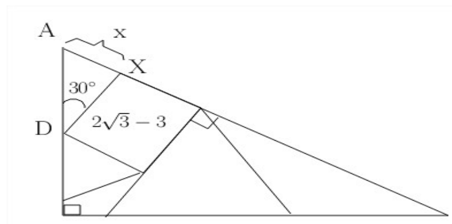
Como o lado é uma grandeza positiva, então $l = 2\sqrt{3}-3$. Então a área do quadrado é dada por:

$$\begin{aligned}
A_q &= l^2 \\
&= (2\sqrt{3}-3)^2 \\
&= ((2\sqrt{3})^2 - 2\cdot(2\sqrt{3})\cdot 3 + 3^2) \\
&= 4\cdot 3 - 12\sqrt{3} + 9 \\
&= 21 - 12\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Aplicando *seno* e *tangente*, em particular do ângulo de $30°$ no triângulo ΔABC, nós consolidamos o seguinte triângulo com a hipotenusa e cateto adjacente ao ângulo $30°$:

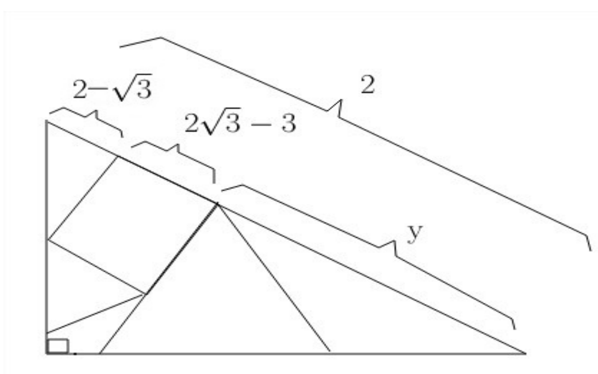


Agora vamos aplicar tangente no triângulo ADX:



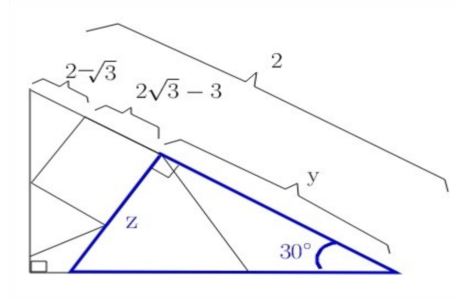
$$\begin{aligned}
\text{tg}(30°) &= \frac{x}{l} \\
\frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{x}{2\sqrt{3}-3} \\
\Rightarrow x &= \frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3}-3) \\
&= 2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Então, temos que:



$$\begin{aligned}
y &= 2-(2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3) \\
&= 2-2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3 \\
&= 3-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

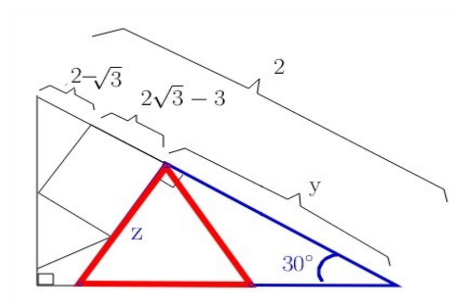
Vamos agora focar no triângulo destacado em azul na figura abaixo:



Aplicando tangente no triñgulo azul, nós temos que:

$$\begin{aligned}
\text{tg}(30°) &= \frac{z}{3-\sqrt{3}} \\
\frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{z}{3-\sqrt{3}} \\
\frac{\sqrt{3}}{3}(3-\sqrt{3}) &= z \Rightarrow z = \sqrt{3}-1
\end{aligned}$$

Como z é o lado do triângulo equilátero, conforme destaca a figura abaixo:



Temos que:

$$\begin{aligned}
A_T &= \frac{z^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{(área de um triângulo equilátero)} \\
&= \frac{(\sqrt{3}-1)^2\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{(\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\cdot 1 + 1^2)\sqrt{3}}{4} \\
&= \sqrt{3} - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} A_q + 12A_T &= (21 - 2\sqrt{3}) + 12\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$