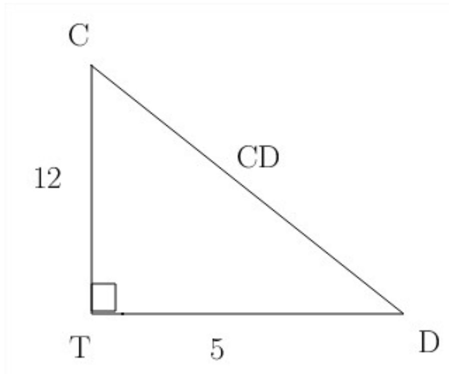
$2^{\underline{o}}$ Jogo Concurso Online de Matemática PUC-Campinas

Gabarito - Segunda Fase (Nível A)

1. *Resp:* 9
   Sol.
   A partir da figura do problema podemos destacar o seguinte triângulo retângulo:



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ΔTDC, nós temos qu:

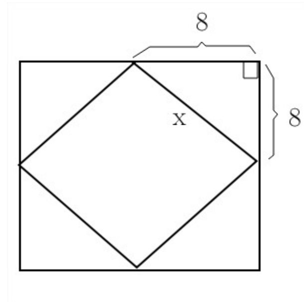
$$\begin{aligned}(CD)^2 &= 12^2 + 5^2 \\ &= 144 + 25 \\ &= 169\end{aligned}$$

Como os segmentos CD e AB são oblíquos e estão sob o mesmo ângulo, então:

$$\begin{aligned}AP + PB &= 13 \\ PB &= 13 - AP \\ PB &= 13 - 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

2. *Resp:* 254
   Sol. Seja A_1 a área do quadrado grande. Temos que:

$$\begin{aligned}A_1 &= 16^2 \\ &= 256\end{aligned}$$



Vamos calcular o lado do primeiro quadrado inscrito, para então depois calcularmos a área do primeiro quadrado inscrito. Considere o desenho abaixo:

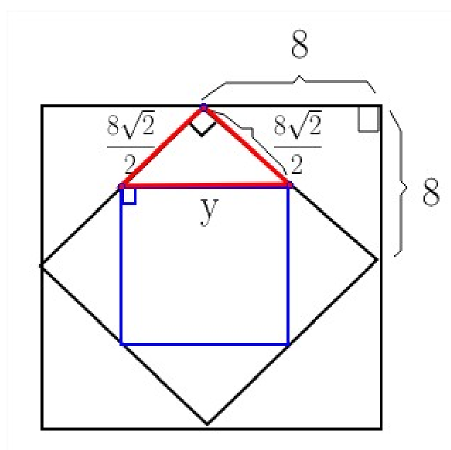
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo destacado no canto superior da figura, temos que:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 8^2 + 8^2 \\
&= 64 + 64 \\
&= 128 \Rightarrow x = \sqrt{128}
\end{aligned}
$$

Então a área do primeiro quadrado inscrito é dada por:

$$A_2 = (\sqrt{128})^2 \Rightarrow A_2 = 128$$

Para calcular a área do segundo quadrado inscrito, precisamos determinar o valor do lado deste quadrado. Considere a figura abaixo:



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo vermelho da figura, temos que:

$$\begin{aligned}
y^2 &= \left(\frac{8\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{64 \cdot 2}{4} + \frac{64 \cdot 2}{4} \\
&= 32 + 32 \\
&= 64 \Rightarrow y = 8
\end{aligned}$$

Então a área do segundo quadrado inscrito (em azul) é dada por:

$$A_3 = 8^2 \Rightarrow A_3 = 64$$

Generalizando, temos que:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 256 \\
A_{\color{red}2} &= 128 = \frac{256}{2^1} = \frac{256}{2^{{\color{red}2}-1}} \\
A_{\color{red}3} &= 64 = \frac{256}{4} = \frac{256}{2^2} = \frac{256}{2^{{\color{red}3}-1}} \\
\vdots &= \vdots \\
A_{\color{red}n} &= \frac{256}{2^{{\color{red}n}-1}} \quad \text{(área do n-ésimo quadrado)}
\end{aligned}$$

Então a soma das áreas dos 7 primeiros quadrados inscritos é igual:

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_8) - A_1 = A_2 + A_3 + \ldots + A_8$$

Ou seja, a soma dos 7 primeiros quadrados inscritos será dada por:

$$\begin{aligned}
A_2 + A_3 + \ldots + A_8 &= \frac{256}{2^{{\color{red}2}-1}} + \frac{256}{2^{{\color{red}3}-1}} + \ldots + \frac{256}{2^{{\color{red}8}-1}} \\
&= \frac{256}{2} + \frac{256}{2^2} + \ldots + \frac{256}{2^7}
\end{aligned}$$

O problema se reduziu a calcular a soma de uma progressão geométrica de 7 termos e razão $q = \frac{1}{2}$. Como $S = \dfrac{a_1(1-q^7)}{1-q}$, então:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{128(1 - (\frac{1}{2})^7)}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 254
\end{aligned}$$

3. *Resp:* 7

   Sol.

   Seja $n = ab$ o número de dois dígitos. Seja $\bar{n} = ab6$ o número transformado.

   Pelas informações do enunciado do problema, nós temos que:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= n + 636 \\ ab6 &= ab + 636 \end{aligned}$$

   Usando o sistema de representação na base 10, nós temos que:

$$\begin{aligned} ab6 &= ab + 636 \\ \Rightarrow a \cdot 100 + b \cdot 10 + 6 &= a \cdot 10 + b + 636 \\ \underbrace{(a \cdot 100 - a \cdot 10)}_{90a} + \underbrace{(b \cdot 10 - b)}_{9b} &= 636 - 6 \\ \Rightarrow 90a + 9b &= 630 \quad (\div 9) \\ 10a + b &= 70 \end{aligned}$$

   A solução da equação acima é $a = 7$ e $b = 0$. Isto implica que $a + b = 7 + 0 = 7$

4. *Resp:* 33

$$\begin{aligned} 2 + xy + 2x + y &= 155 \\ 2 + 2x + xy + y &= 155 \quad \text{(reorganizando a soma)} \\ 2(1 + x) + y(x + 1) &= 155 \quad \text{(fatorando)} \\ (1 + x)(2 + y) &= 155 \quad \text{(fatorando novamente)} \\ (1 + x)(2 + y) &= 155 \\ (1 + x)(2 + y) &= 31 \cdot 5 \end{aligned}$$

   Analisando casos:

   (i) Se $1 + x = 31$ e $2 + y = 5$.

$$\Rightarrow x = 30 \; y = 3 \Rightarrow x + y = 33$$

   (i) Se $1 + x = 5$ e $2 + y = 31$.

$$\Rightarrow x = 4 \; y = 29 \Rightarrow x + y = 33$$

5. Resp: 52

$$-25 + (-24) + \ldots + ? = 26$$

O problema consiste essencialmente em resolver uma soma aritmética de razão 1. Então:

$$a_1 = -25,\ r = 1,\ a_n = -25 + 1(n-1)$$

Como a soma de uma progressão aritmética é dada por:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

então, temos que:

$$26 \quad = \quad \frac{(-25 + (-25 + (n-1)))n}{2} \qquad (*)$$

Resolvendo a equação quadrática $(*)$ para n, temos que:

$$n = 52$$

6. *Resp:* 52

Resolução

Um primeiro passo para resolver o problema acima consiste em identificar quais são as variáveis envolvidas. Temos que as variáveis são:

$$\begin{aligned} x &= \text{hóspedes que gastam só com acomodação} \\ y &= \text{hóspedes que gastam com acomodação e com restaurante} \\ R &= \text{receita total do hotel} \end{aligned}$$

O segundo passo diz respeito à identificação das hipóteses. De fato a receita do hotel depende do número de hóspedes e cada hóspede gasta com o valor de $R\$40,00$ com acomodação. Além disso, os hóspedes que utilizam o serviço de restaurante gastam com $R\$40,00$ de acomodação mais $R\$10,00$ do serviço de restaurante. Então a receita total do hotel será dada por:

$$R(x,y) = 40x + (40+10)y \Rightarrow R(x,y) = 40x + 50y$$

(I) Nós queremos que $R > 2000$, sabendo que $x = 15$ teremos que:

$$\begin{aligned} 40 \cdot 15 + 50 \cdot y &> 2.000 \\ 600 + 50y &> 2000 \\ 50y &> 1400 \\ y &> \frac{1400}{50} \\ y &> 28 \quad \text{hóspedes que gastam com restaurante} \\ &\Rightarrow \text{pelo menos } 29 \end{aligned}$$

(II) Seja t o total de hóspedes do hotel. Então $t = x + y$. Se 40% do total de hóspedes usam o serviço de restaurante então

$$y = 0.4t \quad \text{e} \quad x = 0.6t$$

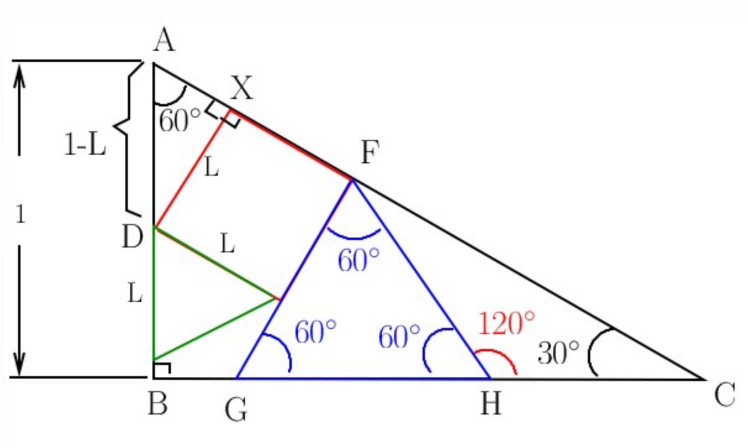
Substituindo x e y dados pelas equações acima e usando a hipótese de que $R \geq 1000$, temos que:

$$\begin{aligned} R \geq 1000 \Rightarrow R(x,y) = 40x + 50y &\geq 1000 \\ 40 \cdot 0.6t + 50 \cdot 0.4t &\geq 1000 \\ 24t + 20t &\geq 1000 \\ 44t &\geq 1000 \\ t &\geq \frac{1000}{44} \\ t &\geq 23 \quad \text{hóspedes} \end{aligned}$$

$$(I) + (II) = 23 + 29 = 52$$

7. *Resp:* 3

Considere o desenho da figura abaixo. Como o triângulo ΔFGH é equilátero, então todos os seus ângulos internos são iguais a $60°$. Como o triângulo ΔFGC é um triângulo retângulo, isto implica que o ângulo $G\hat{C}F$ igual a $30°$ por propriedades de ângulos complementares. Como o complementar de $30°$ é $60°$, então o ângulo com respeito ao vértice A é igual a $60°$.



Vamos empregar uma trigonometria no triângulo ΔADX:

$$\begin{aligned} \text{sen}(60°) &= \frac{l}{1-l} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{l}{1-l} \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da equação acima ao quadrado.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{l}{1-l}\right)^2 \\
\frac{3}{4} &= \frac{l^2}{(1-l)^2} \\
\Rightarrow 3(1-l)^2 &= 4l^2 \\
\Rightarrow 3(1^2-2l+l^2) &= 4l^2 \\
-l^2+6l-3 &= 0
\end{aligned}$$

Cálculo do delta:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 36-4\cdot(-1)\cdot(-3) \\
&= 36+12 \\
&= 48
\end{aligned}$$

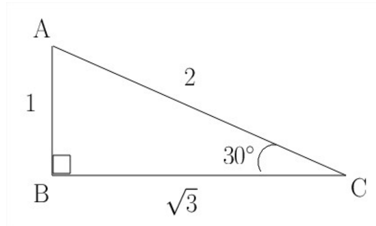
Raízes:

$$\begin{aligned}
l &= \frac{-6\pm\sqrt{48}}{2\cdot 1} \\
&= \frac{-6\pm 4\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{2(-3\pm 2\sqrt{3})}{2} \\
&= 2\sqrt{3}-3
\end{aligned}$$

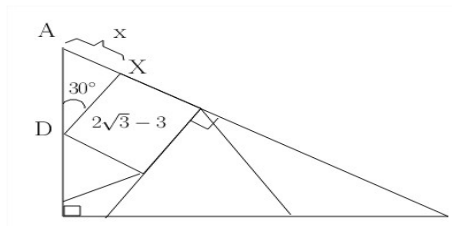
Como o lado é uma grandeza positiva, então $l = 2\sqrt{3}-3$. Então a área do quadrado é dada por:

$$\begin{aligned}
A_q &= l^2 \\
&= (2\sqrt{3}-3)^2 \\
&= ((2\sqrt{3})^2-2\cdot(2\sqrt{3})\cdot 3+3^2) \\
&= 4\cdot 3-12\sqrt{3}+9 \\
&= 21-12\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Aplicando *seno* e *tangente*, em particular do ângulo de $30°$ no triângulo ΔABC, nós consolidamos o seguinte triângulo com a hipotenusa e cateto adjacente ao ângulo $30°$:

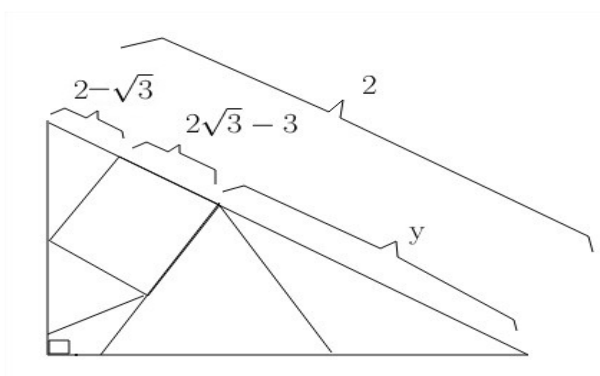


Agora vamos aplicar tangente no triângulo ADX:



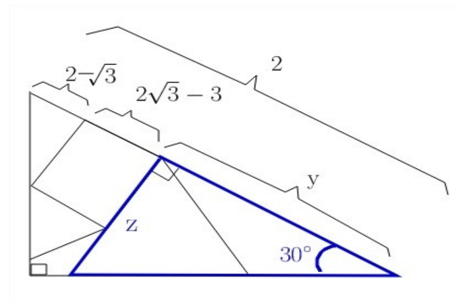
$$
\begin{aligned}
\text{tg}(30°) &= \frac{x}{l} \\
\frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{x}{2\sqrt{3}-3} \\
\Rightarrow x &= \frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3}-3) \\
&= 2-\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Então, temos que:



$$
\begin{aligned}
y &= 2-(2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3) \\
&= 2-2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3 \\
&= 3-\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

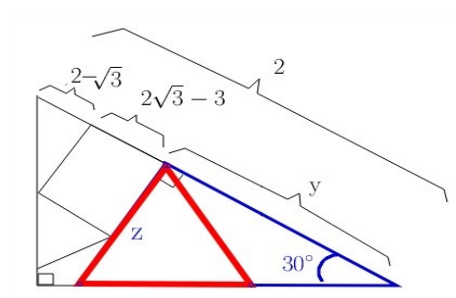
Vamos agora focar no triângulo destacado em azul na figura abaixo:



Aplicando tangente no triñgulo azul, nós temos que:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}(30^\circ) &= \frac{z}{3-\sqrt{3}} \\
\frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{z}{3-\sqrt{3}} \\
\frac{\sqrt{3}}{3}(3-\sqrt{3}) &= z \Rightarrow z = \sqrt{3}-1
\end{aligned}
$$

Como z é o lado do triângulo equilátero, conforme destaca a figura abaixo:



Temos que:

$$
\begin{aligned}
A_T &= \frac{z^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{(área de um triângulo equilátero)} \\
&= \frac{(\sqrt{3}-1)^2\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{(\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\cdot 1 + 1^2)\sqrt{3}}{4} \\
&= \sqrt{3} - \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Então,

$$\begin{aligned} A_q + 12A_T &= (21 - 2\sqrt{3}) + 12\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

8. *Resp:* $a = 1$

Dado o sistema de equações:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \quad (I) \\ (x-a)^2 + y^2 &= 1 \quad (II) \end{aligned}$$

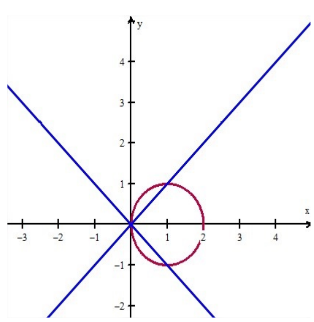
Manipulando a Equação (I), nós temos que:

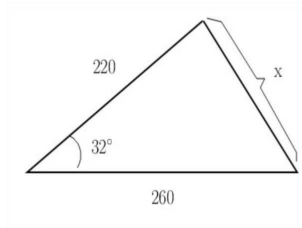
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 &= y^2 \\ \Rightarrow \sqrt{x^2} &= \sqrt{y^2} \quad \text{(tomando a raiz quadrada em ambos os membros)} \\ &\Rightarrow \; |x| = |y| \Rightarrow \text{duas retas} \quad (y = x \quad \text{ou} \quad y = -x) \end{aligned}$$

Manipulando a Equação (II):

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + y^2 &= 1 \\ \Rightarrow (x-a)^2 + (y-0)^2 &= 1^2 \quad \text{(circunferência de centro } (a,0)\text{e raio} 1) \end{aligned}$$

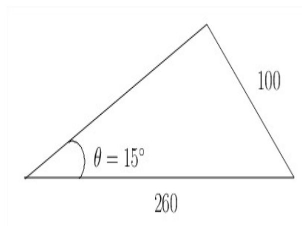
Representando geometricamente as duas retas e a circunferência com $a = 1$, é possível observar que temos três pontos de intersecção com a circunferência, com esta escolha para a.





9. (I) Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo acima, temos que:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (220)^2 + (260)^2 - 2(220)(260)\text{cos}(32^\circ) \\
&= 18983.298 \Rightarrow x \approx 137.77
\end{aligned}
$$

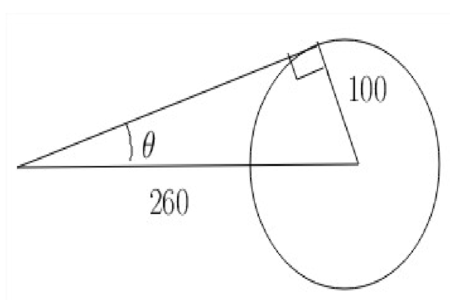


(II) Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo acima, temos que:

$$
\begin{aligned}
100^2 &= y^2 + (260)^2 - 2 \cdot y260 \cdot \cos(15^\circ) \\
&= y^2 + 67600 - 502.28y \\
\Rightarrow y^2 - 502.28y + 57600 &= 0
\end{aligned}
$$

Resolvendo a equação quadrática acima, chegaremos as seguintes soluções:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 177.171 \\
y_2 &= 325.112
\end{aligned}
$$

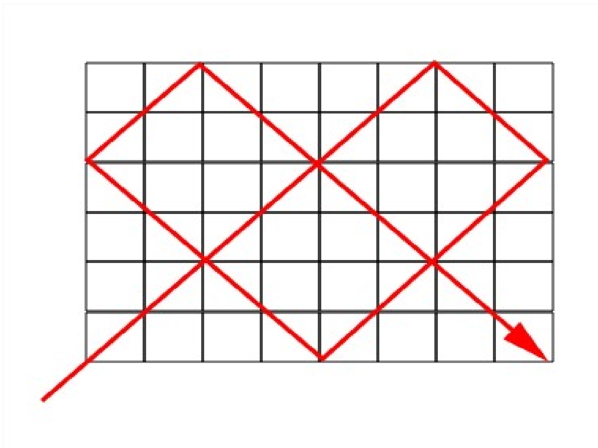


(III)

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta) &= \frac{100}{260} \\ \Rightarrow \theta &\approx 22.6^\circ \end{aligned}$$

10. *Resp:* 240

Se analisarmos um caso simples 8×6, teremos a seguinte situação descrita pela figura abaixo:



Observe que para cada quadradinho atravessado, o raio avança uma unidade na direção horizontal e uma unidade na direção vertical. O raio chegará a um vértice quando o número x de quadrados atravessados for um múltiplo comum de 6 e 8. Chegará pela primeira vez quando este número for o menor múltiplo comum de 6 e 8, ou seja, quando $mmc(6, 8) = 24$.

Em particular se tivermos um retângulo de lados 60 e 80, serão atravessados um número de quadrados correspondente à $mmc(60, 80) = 240$.