3º Jogo Concurso Online de Matemática PUC-Campinas

Gabarito - Primeira Fase

1. *Alternativa* (c)

   Solução:

   Para resolvermos este problema, vamos considerar os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} \text{par} + \text{par} &= \text{par} && (I) \\ \text{par} + \text{ímpar} &= \text{ímpar} && (II) \\ \text{ímpar} + \text{ímpar} &= \text{par} && (III) \end{aligned}$$

   Se Cláudia tivesse somado os três preços de forma correta, então ela teria encontrado o valor $155 + 86 + 79 = 320$, mas Cláudia somou os preços dos brinquedos de forma equivocada e obteve como resposta o número par 248. Ela errou a conta e precisamos descobrir qual foi o erro que ela cometeu.

   Vamos analisar cada alternativa independentemente.

   A alternativa (a) não é possível pois se ela tivesse somado um dos preços duas vezes, então para ter o resultado par 248, necessariamente ela teria que somar um par duas vezes. Porque se fosse somado um ímpar duas vezes veja o que ocorreria:

$$\begin{aligned} \underbrace{2 \times \text{ímpar}}_{\text{par}} + \text{par} + \text{ímpar} &= \underbrace{\text{par} + \text{par}}_{\text{par}} + \text{ímpar} \\ &= \text{par} + \text{ímpar} \\ &= \text{ímpar} \neq \text{do par} \quad 248 \end{aligned}$$

   Desta forma, se o número par 86 fosse somado duas vezes, teríamos:

$$155 + 2 \times 86 + 79 = 406 \Rightarrow 155 + 2 \times 86 + 79 \neq 248$$

   Vamos analisar agora a alternativa (b). De fato, a alternativa (b) também não é possível, pois se ela esqueceu de incluir um dos três preços, então necessariamente teria que ter esquecido de somar o número par 86. Pois se tivesse esquecido um ímpar, veja o que aconteceria:

$$\begin{aligned} \text{ímpar} + \text{par} &= \text{ímpar} \\ &\neq \text{do par} \quad 248 \end{aligned}$$

Desta forma, se o 86 fosse esquecido, teríamos:

$$\begin{aligned} 155 + 79 &= 234 \\ &\neq 248 \end{aligned}$$

A alternativa (d) não é possível, pois se ela tivesse subtraído um dos três preços, ao invés de somá-lo, então necessariamente teria que ser o par 86, pois:

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{ímpar} + \text{ímpar}}_{\text{par}} - \text{par} &= \text{par} - \text{par} \\ &= \text{par} \end{aligned}$$

Então se ela tivesse subtraído o número par 86, ao invés de somá-lo, teríamos que:

$$\begin{aligned} 155 + 79 - 86 &= 148 \\ &\neq 248 \end{aligned}$$

A alternativa (*e*) também não seria possível, pois se ela tivesse somado um dos três preços três vezes, observe o que ocorreria com respeito à cada possibilidade:

$$\begin{aligned} 3 \times 155 + 86 + 79 = 630 &\quad (\text{diferente de} \quad 248) \\ 155 + 3 \times 86 + 79 = 498 &\quad (\text{diferente de} \quad 248) \\ 155 + 86 + 3 \times 79 = 478 &\quad (\text{diferente de} \quad 248) \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa possível é a alternativa (c). Com efeito, ela eliminou o último dígito de um dos três preços.

Basta testarmos as três possibilidades: Se ela eliminou o último dígito do ímpar 155 então a soma fica:

$$15 + 86 + 79 = 180 \quad (\text{diferente do } 248)$$

Se ela eliminou o último dígito do par 86 então a soma fica:

$$155 + 8 + 79 = 242 \quad (\text{diferente do } 248)$$

Se ela eliminou o último dígito do ímpar 79 então a soma fica:

$$155 + 86 + 7 = 248$$

2. *Alternativa* (e)

Solução

Primeiramente, vejamos como calcular o valor a ser pago, com um desconto de 20%, referente a um produto de valor x.

$$\begin{aligned}\text{valor pago com desconto} &= x - 20\%\text{de} \quad x \\ &= x - \frac{20}{100}x \\ &= x - 0.2x \\ &= (1 - 0.2)x \\ &= 0.8 \cdot x\end{aligned}$$

Então, com respeito ao nosso problema, nós temos que:

$$\begin{aligned}\text{desconto de } 20\% \text{ no cubo mágico} &= 0.8 \cdot 155 = 124 \\ \text{desconto de } 20\% \text{ na torre de Hanoi} &= 0.8 \cdot 86 = 68.8 \\ \text{total a pagar} &= 124 + 68.8 \Rightarrow \text{valor total} = 192.8 < 200 \text{ (Odilon pode comprar)}\end{aligned}$$

Analisando a segunda situação:

$$\begin{aligned}\text{desconto de } 20\% \text{ no cubo mágico} &= 0.8 \cdot 155 = 124 \\ \text{desconto de } 20\% \text{ no caça palavras} &= 0.8 \cdot 79 = 63.2 \\ \text{total a pagar} &= 124 + 63.2 \Rightarrow \text{valor total} = 187.2 < 200 \text{ (Odilon pode comprar)}\end{aligned}$$

Analisando a terceira situação:

$$\begin{aligned}\text{desconto de } 20\% \text{ no cubo mágico} &= 0.8 \cdot 155 = 124 \\ \text{desconto de } 20\% \text{ na torre de Hanoi} &= 0.8 \cdot 86 = 68.8 \\ \text{desconto de } 20\% \text{ no caça palavras} &= 0.8 \cdot 79 = 63.2 \\ \text{total a pagar} &= 124 + 68.8 + 63.2 \Rightarrow \text{valor total} = 256 > 200 \\ &\Rightarrow \text{Odilon não pode comprar}\end{aligned}$$

3. *Alternativa* (d)

Solução:

conjunto de possibilidades para as letras $=\{1,2,3,4,5\}$

conta:

$$
\begin{array}{cccc}
 & d & c & c \\
- & b & b & d \\
\hline
 & b & a & e
\end{array}
$$

Com respeito à relação de ordem das letras, para que a conta esteja bem definida, nós devemos ter que:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow c > d \quad \text{e} \quad c > e \\
&\Rightarrow c > b \quad \text{e} \quad c > a \\
&\Rightarrow d > b
\end{aligned}
$$

Em relação às contas, nós temos que:

$$
\begin{aligned}
c - d &= e \quad (I) \\
c - d &= a \quad (II) \\
d - b &= b \quad (III)
\end{aligned}
$$

Segue de (III) que:

$$
\begin{aligned}
d - b &= b \\
d &= 2b \quad (IV)
\end{aligned}
$$

Logo, segue da Equação (IV) e do conjunto de valores possíveis para as letras, que b não pode ser igual a 3. Senão teríamos $d = 2b$; $\quad d = 2 \cdot 3 = 6$ e $6 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Desta forma, devemos analisar dois casos. Se $b = 1$, então

$$
\begin{aligned}
d &= 2 \cdot 1 \quad \text{(pela Equação } IV) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Subtraindo as Equações (I) e (II), nós obtemos a seguinte equação:

$$
\begin{aligned}
-d+b &= e-a\\
-2+1 &= e-a \Rightarrow 1 = a-e \quad (V)
\end{aligned}
$$

Segue da Equação (I) que:

$$
\begin{aligned}
c-d &= e\\
c-2 &= e\\
&\Rightarrow c = e+2 \quad (VI)
\end{aligned}
$$

Segue da Equação (II) que:

$$
\begin{aligned}
c-b &= a\\
c-1 &= a \Rightarrow c-a = 1 \quad (VII)
\end{aligned}
$$

Como $c > d$, se $c = 5$, então segue da Equação (VI) que $e = 3$ e segue da Equação (VII) que $a = 4$. Veja que esta possibilidade está em concordância com a Equação (V):

$$
\begin{aligned}
1 &= \underbrace{a}_{4} - \underbrace{e}_{3}\\
1 &= 1 \quad \text{(ok!)}
\end{aligned}
$$

Desta forma, os valores corretos para **b**, **a** e **e** são: $1, 4$ e 3, respectivamente.

4. *Alternativa* (c)

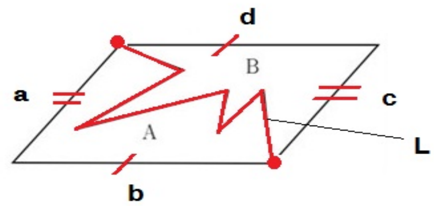
   Solução:

1	3	2
2	1	3
3	2	1

5. *Alternativa* (d)

   Como a união das regiões A e B formam um paralelogramo, então segue da figura acima que:

$$a+b = c+d \qquad (I)$$



Veja que as regiões A e B compartilham a mesma fronteira de comprimento L. Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned}\text{Perímetro}_A &= \underbrace{a+b}_{c+d}+L \\ &= c+d+L \quad (\text{por} \quad (I)) \\ &= \text{Perímetro}_B\end{aligned}$$

6. *Resposta* $= 7$ balas
   Solução:

   Sejam:

$$\begin{aligned}y &= \text{número de crianças no grupo A} \\ x &= \text{número de crianças no grupo B}\end{aligned}$$

   Dado:

$$y = \frac{4}{3}x \qquad (I)$$

   Como o número de crianças deve ser um número inteiro, devemos ter que x é um múltiplo de 3 na Equação (I). Como queremos o número mínimo de crianças, teremos que $x = 3$. Mas se $x = 3$, então segue da Equação (I) que $y = \frac{4}{3} \cdot 3 \Rightarrow y = 4$. Logo o total de crianças seria igual a:

$$\text{total} = x + y = 3 + 4 = 7 \quad \text{crianças}$$

   Como cada criança receberá uma bala, isto implica que o menor número de balas que podemos considerar é 7.

7. *Resposta* $= 3$

   Solução:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{14}x$$

   Temos que: Se $y = 0$, então $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{14}x = 0$.

$$\Rightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{14}\right) = 0$$

   Isto implica que $x = 0$, ou,

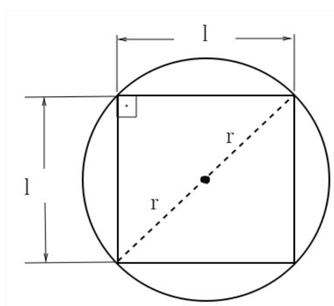
$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{14} &= 0\\ \frac{x^2}{3} &= \frac{1}{14}\\ \Rightarrow x^2 &= \frac{3}{14}\\ \Rightarrow x &= \sqrt[2]{\frac{3}{14}}\\ &\approx 0.46m \Rightarrow x \approx 46\text{cm}\end{aligned}$$

Isto significa que o ponto A está a uma distância inferior a 50 centímetros do ponto B.

8. *Alternativa* (c)

   Solução

   Considere a figura abaixo.



Como a diagonal do quadrado é dada por:

$$\text{diagonal} = l\sqrt{2}$$

Então,

$$\begin{aligned}\text{diagonal} &= l\sqrt{2}\\ 2r &= l\sqrt{2}\\ r &= \frac{l\sqrt{2}}{2} \qquad (I)\end{aligned}$$

Com respeito ao círculo, de fato temos que a sua área é dada por:

$$A_c = \pi \cdot r^2 \qquad (II)$$

Substituindo (I) em (II), temos que:

$$\begin{aligned} A_c &= \pi\left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \pi \cdot \frac{l^2 \cdot 2}{4} \\ &= \frac{\pi \cdot l^2}{2} \quad (III) \end{aligned}$$

Sabemos que a área do quadrado é dada por:

$$A_Q = l^2 \qquad (IV)$$

Como a área azul é dada por:

$$A_{\text{azul}} = A_c - A_Q$$

Subtraindo as equações (III) e (IV), nós temos que:

$$\begin{aligned} A_{\text{azul}} &= A_c - A_Q \\ &= \pi l^2 2 - l^2 \\ &= \frac{\pi l^2}{2} - \frac{2l^2}{2} \\ &= \frac{l^2}{2}(\pi - 2) \end{aligned}$$

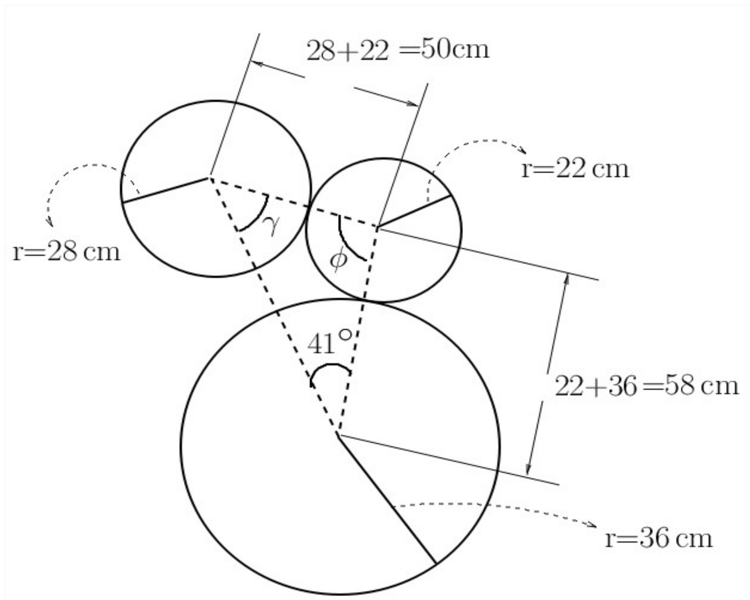
Então,

$$\begin{aligned} \frac{A_{\text{azul}}}{A_Q} &= \frac{\frac{l^2(\pi-2)}{2}}{l^2} \\ &= \frac{l^2(\pi-2)}{2} \cdot \frac{1}{l^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

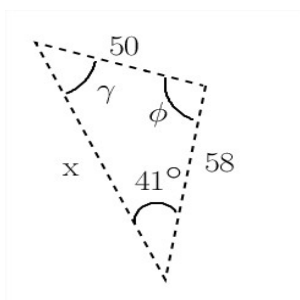
9. *Alternativa* (e)

Solução:

Considere o desenho abaixo.



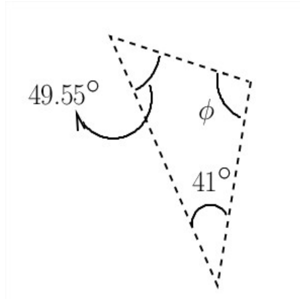
Vamos analisar o triângulo de referência formado a partir dos raios das engrenagens, de acordo com a figura acima.



Aplicando a lei dos senos ao triângulo, nós temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{50}{\text{sen}(41°)} &= \frac{58}{\text{sen}(\gamma)} \\
\Rightarrow 50 \cdot \text{sen}(\gamma) &= 58 \cdot \text{sen}(41°) \\
\Rightarrow \text{sen}(\gamma) &= \frac{58 \cdot \text{sen}(41°)}{50} \\
\text{sen}(\gamma) &= = 0.76102 \Rightarrow \gamma = \text{arcsen}(0.76102) \Rightarrow \gamma = 49.5°
\end{aligned}$$

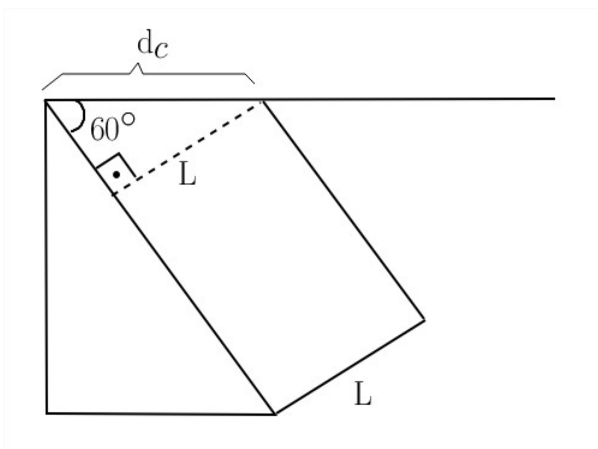
Voltando ao triângulo de referência, nós temos que:



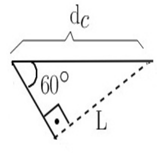
$$\begin{aligned} 49.5^\circ + 41^\circ + \phi &= 180^\circ \quad \text{(soma dos ângulos internos de um triângulo)} \\ \Rightarrow \phi &= 180^\circ - 49.5^\circ - 41^\circ \\ \Rightarrow \phi &= 89.5^\circ \end{aligned}$$

10. *Alternativa* (d)

Considere a figura abaixo.



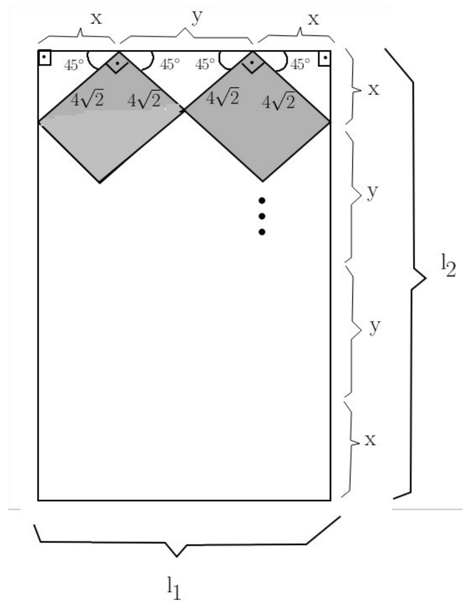
A partir da figura, nós podemos extrair um triângulo retângulo de referência:



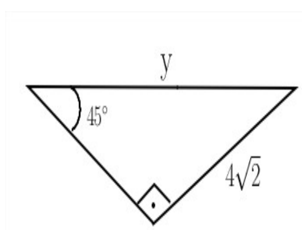
Então, $\text{sen}(60^\circ) = \dfrac{L}{d_c} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{L}{d_c} \Rightarrow d_c \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot L \Rightarrow \dfrac{d_c}{L} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

11. *Alternativa* (b)
Solução

Considere a figura abaixo.

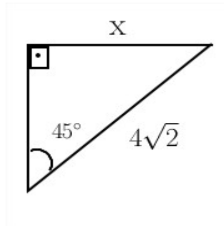


Vamos determinar a medida y a partir do triângulo retângulo de referência.



$$\begin{aligned}\underbrace{\text{sen}(45^\circ)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{4\sqrt{2}}{y}\\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{4\sqrt{2}}{y}\\ \Rightarrow y &= 8\end{aligned}$$

Para determinar a medida x, considere o triângulo retângulo de referência abaixo, retirado da figura da cartolina.



Temos que:

$$\begin{aligned}\underbrace{\cos(45°)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{x}{4\sqrt{2}} \\ \Rightarrow x &= 4\end{aligned}$$

Então, temos que:

$$l_1 = 2x + y \Rightarrow l_1 = 2 \cdot 4 + 8 \Rightarrow l_1 = 16$$

Com respeito ao lado l_2, nós temos que:

$$\begin{aligned} l_2 &= 2x + 2y \\ &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \\ &= 8 + 16 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} A_{\text{cartolina}} &= l_1 \cdot l_2 \\ &= 16 \cdot 24 \\ &= 384 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

12. *Alternativa* (e)
    Solução:

    Se $x = 2^k$, para algum *k* positivo $\Rightarrow x = 2 \cdot 2^{k-1} \Rightarrow x$ é par.

13. *Resposta* $= 4$

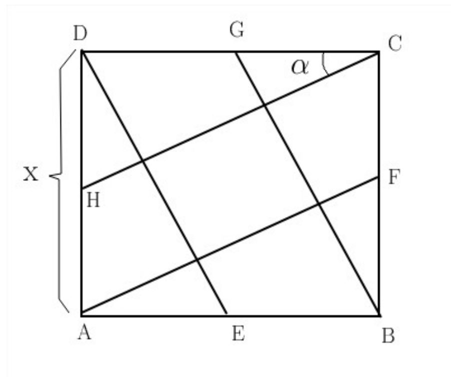
9	4	7	9	4	7	9	4	7	9	4	7	9	4

14. *Resposta* $= 10$

15. *Resposta* $= 4$

Solução:

Considere a figura abaixo.

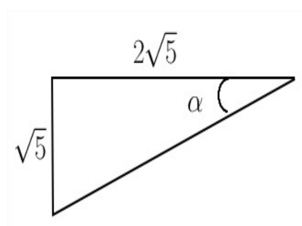


Como o quadrado $ABCD$ tem área igual a 20 e como a área de um quadrado calcula-se por meio do lado ao quadrado, então:

$$\underbrace{A_Q}_{20} = x^2$$

$$\begin{aligned} 20 &= x^2 \\ \Rightarrow x &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

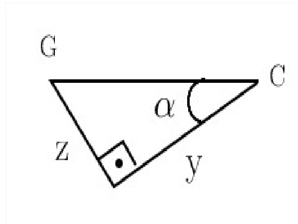
Dado que o ponto H representa o ponto médio do lado do quadrado e considerando que o lado x mede $2\sqrt{5}$, então temos o seguinte triângulo retângulo CDH, de referência:



Segue, do triângulo retângulo representado na figura acima, que :

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha) &= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 26.56^\circ \end{aligned}$$

Considere o triângulo retângulo de referência formado a partir dos vértices C e G e pelo ângulo $\alpha = 26.56°$.



Temos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(26.56°) &= \frac{z}{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow z &= \sqrt{5} \cdot \text{sen}(26.56) \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Com respeito ao lado y, nós temos que:

$$\begin{aligned} \cos(26.56°) &= \frac{y}{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow y &= \sqrt{5} \cdot \cos(26.56°) \\ \Rightarrow y &= 2 \end{aligned}$$

En ˜ao a área deste triângulo é dada por:

$$A_T = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

De acordo com a figura abaixo, observe que podemos encontrar 16 triangulos, semelhantes ao triângulo anterior, de modo que os triangulos limitam a área do quadrado vermelho. Desta forma, temos que a área do quadrado vermelho é dada por:

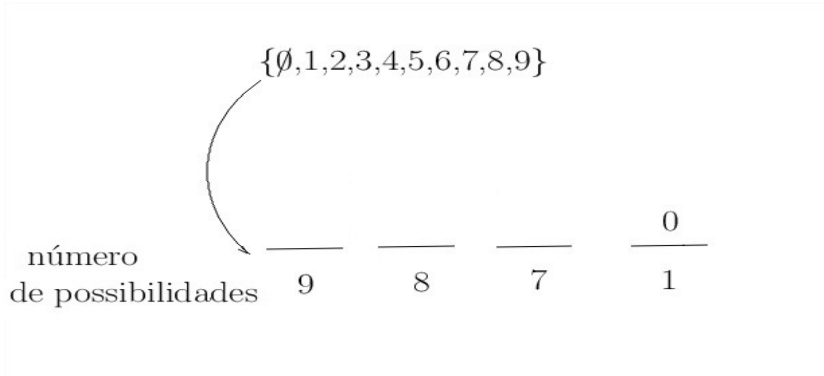
$$\begin{aligned} A &= A_Q - 16A_T \\ A &= 20 - 16 \cdot 1 \\ A &= 4 \end{aligned}$$

16. *Resposta* $= 952$

Solução

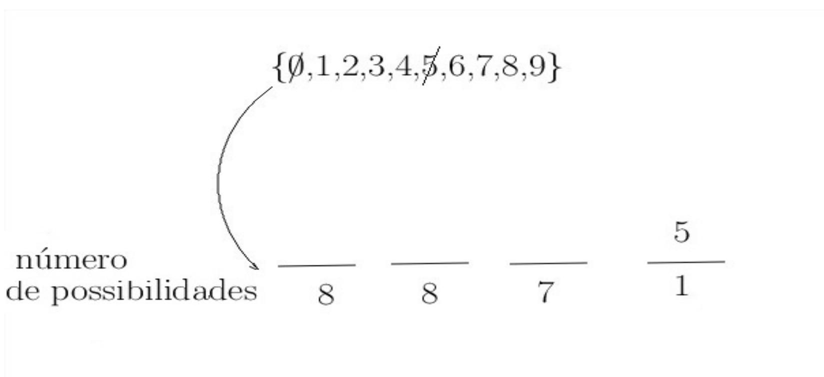
Se n é divisível por 5, então n deve terminar em 0 ou em 5. Essencialmente, teremos dois casos para considerar:

caso (i) Se o último dígito for igual à 0. Neste caso como o último dígito está fixo, a seguinte situação:



$$\text{número de possibilidades} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$$

caso (i) Se o último dígito for igual à 5. Neste caso como o último dígito está fixo, a seguinte situação:

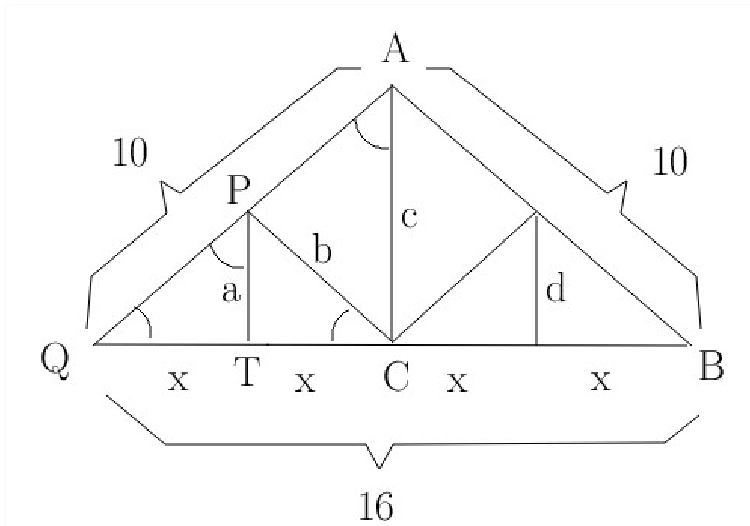


$$\text{número de possibilidades} = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 448$$

Desta forma, o total de possibilidades de representações para o número n é igual a $504 + 448 = 952$.

17. *Resposta* $= 14$
Solução:

Segue da figura abaixo que $4x = 16 \Rightarrow x = 4$.



Aplicando o *Teorema de Pitágoras* no triângulo ΔABC, nós temos que:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 8^2 + c^2 \\ 100 &= 64 + c^2 \Rightarrow c^2 = 100 - 64 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6 \end{aligned}$$

Aplicando razão de semelhança aos triângulos ΔAQC e ΔPQT, temos que:

$$\frac{6}{a} = \frac{8}{4} \Rightarrow a = 3$$

Aplicando o *Teorema de Pitágoras* ao triângulo ΔPTC, nós temos que:

$$\begin{aligned} b^2 &= 4^2 + 3^2 \\ b^2 &= 16 + 9 \\ b &= \sqrt{25} \\ b &= 5 \end{aligned}$$

Desta forma, temos que:

$$a + b + c = 3 + 5 + 6 = 14$$

18. *Alternativa* (d)
Solução

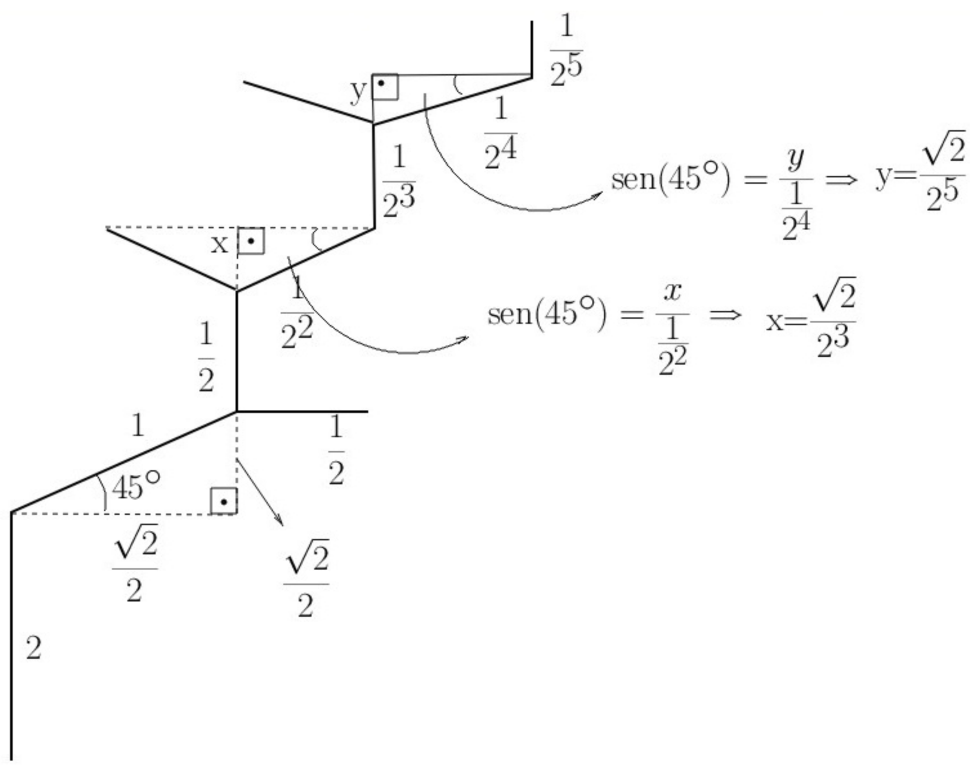
Se $x = 5$ é uma solução da equação dada, então $x = 5$ satisfaz a equação dada. Substituindo $x = 5$ na equação, nós temos que:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 5 \bullet 7}{6} &= \frac{4 + 3 \diamond 5}{24} \\ \frac{10 \bullet 7}{6} &= \frac{4 + 3 \diamond 5}{24} \end{aligned}$$

Para o cumprimento da equação acima, nós devemos ter que os sinais $\bullet$ e $\diamond$ devem representar, respectivamente, as operações $-$ e $+$.

19. *Alternativa* (d)
Solução:

Considere a figura abaixo.



Vamos analisar a sequencia de somas parciais das alturas da árvore: $S_n =$ altura da árvore após n anos

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 2 \\
S_2 &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
S_3 &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^3} \\
S_5 &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^3} + \frac{1}{2^3} \\
S_6 &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{\sqrt{2}}{2^5}
\end{aligned}
$$

Em particular, com respeito à S_6, vamos reorganizar a soma:

$$
\begin{aligned}
S_6 &= \left(2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^3} + \frac{\sqrt{2}}{2^5}\right) \\
S_6 &= \sum_{j=1}^{\frac{6}{2}} \frac{4}{2^{2j-1}} + \sum_{j=1}^{\frac{6}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2^{2j-1}}
\end{aligned}
$$

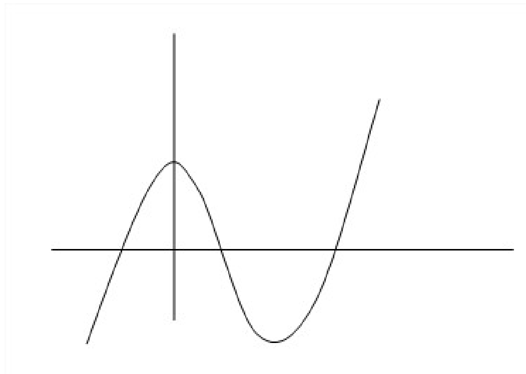
Generalizando para n e considerando n par, temos que:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{4}{4^j \cdot 2^{-1}} + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\sqrt{2}}{4^j \cdot 2^{-1}} \\
&= \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{8}{4^j} + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2\sqrt{2}}{4^j} \\
&= \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{8}{4^j} + \frac{2\sqrt{2}}{4^j} \\
&= \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} (8 + 2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{4}\right)^j \\
S_n &= (8 + 2\sqrt{2}) \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^j \\
S_n &= (8 + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{4})^{\frac{n}{2}})}{1 - \frac{1}{4}} \quad \text{(Fórmula da soma de PG)} \\
\Rightarrow S_{60} &= (8 + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{4})^{\frac{60}{2}})}{1 - \frac{1}{4}} = 3.60 \text{ m}
\end{aligned}
$$

20. *Alternativa* (d)

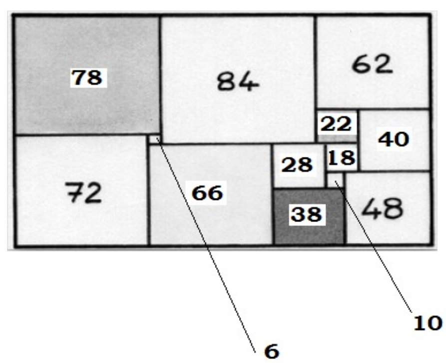
Solução:

Esta é uma questão de visualização da função a partir dos dados. Segue abaixo o gráfico da função que satisfaz as propriedades do enunciado.



21. *Resposta* $= 24$

Segue, na figura abaixo, o valor do comprimento de cada lado dos outros quadrados.



Desta forma, como o menor quadrado tem lado igual a 6, isto implica que o seu perímetro P será dado por:

$$P = 4 \cdot 6 \Rightarrow P = 24$$

22. *Alternativa* (b)

Solução:

Nesta questão, basta perceber que o volume inicial de líquido dentro do cilíndro corresponde exatamente ao volume do cilindro e o volume de líquido derramado corresponde ao volume da esfera. Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{V_{\text{cil}}}{V_{\text{esf}}} &= \frac{2\pi R^3}{\frac{4\pi R^3}{3}} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

23. *Alternativa* (a)
Solução:

Temos que:

$$\begin{aligned}a &= 2^{7000} \\ &= (2^7)^{1000} \\ &= 128^{1000}\end{aligned}$$

Com respeito ao número b, temos que:

$$\begin{aligned}b = (5^{3000}) \\ &= (5^3)^{1000} \\ &= 125^{1000}\end{aligned}$$

Em relação à base c, temos que:

$$\begin{aligned}c &= 13^{2000} \\ &= (13^2)^{1000} \\ &= 169^{1000}\end{aligned}$$

Dado que a, b e c podem ser escritos como potências ao mesmo expoente, basta compararmos as bases. Desta forma, temos que $b < a < c$.

24. *Alternativa* (e)
Solução:

Reescrevendo o sistema na forma fatorada, nós temos que:

$$\begin{aligned}y \cdot (x^2 - y) &= 0 \\ (x^2 - y) \cdot (x + 1) &= 0\end{aligned}$$

Analisando a primeira equação:

Devemos ter $y = 0$ ou $x^2 - y = 0$. Segue de $x^2 - y = 0$ que $y = x^2$ e portanto o par (x, x^2) é solução da primeira equação.

Analisando a segunda equação:

Devemos ter $x^2 - y = 0$ ou $x + 1 = 0$. Segue de $x^2 - y = 0$ que o par (x, x^2) também satisfaz a segunda equação. Isto significa que (x, x^2) são infinitas soluções do sistema dado.

Se x+1=0, isto implica que $x = -1$. Desta forma, substituindo $x = -1$ na primeira equação do sistema, obtemos $y \cdot (1 - y) = 0$ e isto implica que $y = 0$ ou $y = 1$. E portanto, o par $(-1, 1)$ seria solução do sistema, o que invalida a afirmação II.

Por último, vamos analisar a afirmação III. Substituindo $y = -8$ na primeira equação, nós obtemos $x = \sqrt{-8}$. Isto significa que a afirmação (III) é verdadeira, pois $x = \sqrt{-8}$ não é um número real. Assim, I e III são verdadeiras.

25. *Questão cancelada*