Questão 1

Resposta: 115

Solução:

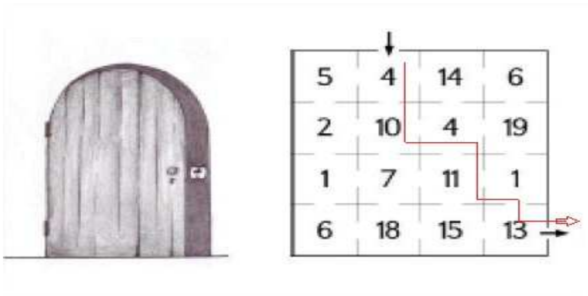
$A = 20$, $B = 5$, $C = 5$, $D = 5$, $E = 10$, $F = 20$.

$$\begin{aligned} A + B \cdot F - C &= 20 + 5 \cdot 20 - 5 \\ &= 20(1 + 5) - 5 \\ &= 20 \cdot 6 - 5 \\ &= 120 - 5 \\ &= 115 \end{aligned}$$

Questão 2

Resposta: 43

Solução:



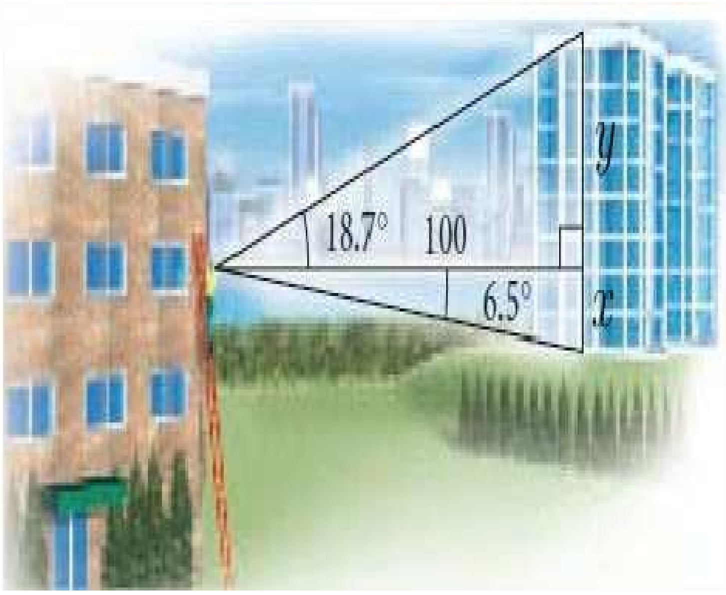
$$\text{Soma} = 4 + 10 + 4 + 11 + 1 + 13 = 43$$

Questão 3

Resposta: 45

Solução:

A figura abaixo ilustra a situação do problema.



Aplicando uma trigonometria no âmbito do triângulo superior, teremos que:

$$\text{tg}(18.7°) = \frac{y}{100} \Rightarrow y = 100 \cdot \text{tg}(18.7°)$$

Aplicando uma trigonometria no âmbito do triângulo inferior, teremos que:

$$\text{tg}(6.5°) = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 100 \cdot \text{tg}(6.5°)$$

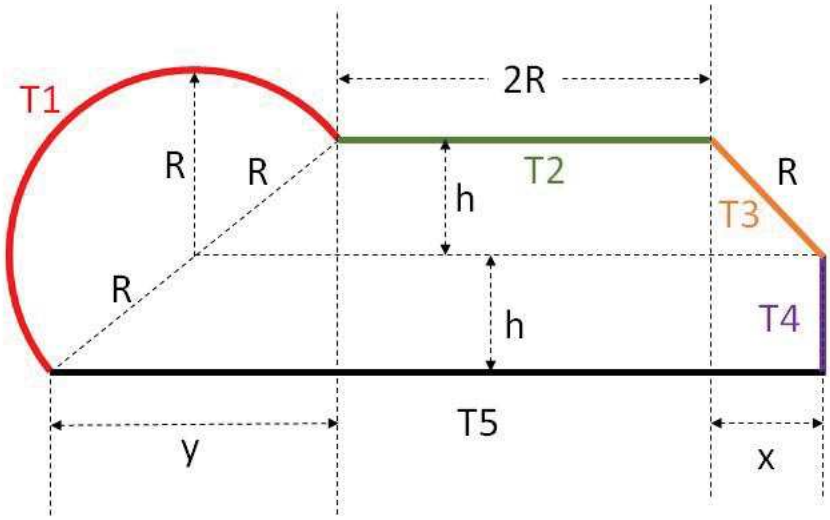
A altura do prédio é dada por:

$$\begin{aligned}
h &= y + x \\
h &= 100 \cdot \text{tg}(18.7°) + 100 \cdot \text{tg}(6.5°) \\
h &= 100 \cdot (\text{tg}(18.7°) + \text{tg}(6.5°)) \\
h &= 45.24 \Rightarrow h \approx 45 \text{ pés}
\end{aligned}$$

Questão 04

Resposta: **5570**

Para facilitar a compreensão, vamos denominar os trechos: T1, T2, T3, T4 e T5 (conforme ilustrado na figura abaixo), e seus valores correspondem ao comprimento do trecho.



$$T1 = \pi R$$

$$T2 = 2R$$

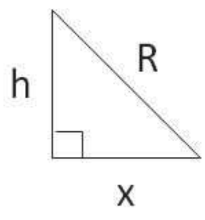
$$T3 = R$$

$$T4 = h$$

$$T5 = x + 2R + y$$

Sabe-se que:

- $h = 0{,}6R$.
- Calculando x em função de R.



$$R^2 = h^2 + x^2$$

$$x^2 = R^2 - h^2$$

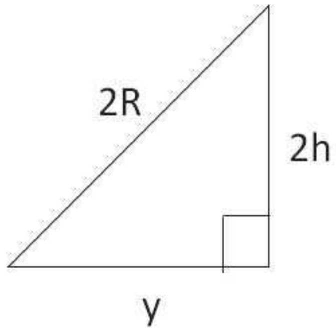
$$x^2 = R^2 - (0{,}6R)^2$$

$$x^2 = R^2 - 0{,}36R^2$$

$$x^2 = 0{,}64R^2$$

$$x = 0{,}8R$$

- Calculando y em função de R.



$$(2R)^2 = (2h)^2 + y^2$$
$$y^2 = (2R)^2 - (2h)^2$$
$$y^2 = 4R^2 - 4h^2$$
$$y^2 = 4R^2 - 4(0{,}6R)^2$$
$$y^2 = 4R^2 - 4(0{,}36R^2)$$
$$y^2 = 4R^2 - 1{,}44R^2$$
$$y^2 = 2{,}56R^2$$
$$y = 1{,}6R$$

Logo, o comprimento da pista (c) será:

$$c = T1 + T2 + T3 + T4 + T5$$
$$c = \pi R + 2R + R + h + (x + 2R + y)$$
$$c = \pi R + 2R + R + 0{,}6R + (0{,}8R + 2R + 1{,}6R)$$
$$c = \pi R + 2R + R + 0{,}6R + 4{,}4R$$
$$c = \pi R + 8R$$
$$c = (\pi + 8)R$$

Como o atleta dá 5 voltas, a distância percorrida (d) será:

$$d = 5c$$
$$d = 5(\pi + 8)R$$

Fazendo: $\pi \cong 3{,}14$ e $R = 100m$, temos:

$$d = 5(3{,}14 + 8)100$$
$$d = 5(11{,}14)100$$
$$d = 5570\ m$$

Questão 05

Letra: **E**

Analisando os itens:

Item I – **FALSO**.

Para não cortar o eixo x, é necessário não ter raízes reais, ou seja:

$$\Delta < 0$$
$$3^2 - 4 \times a \times (-2) < 0$$
$$9 + 8a < 0$$
$$a < -\frac{9}{8}$$

Só não cortará o eixo x se $a < -\frac{9}{8}$.

Item II – **VERDADEIRO**.

Lembre-se que a função exponencial (e^{Ax}) é positiva para qualquer valor de x. Logo, a função $g(x)$ é multiplicada por um fator negativo (-2), que fará $g(x) < 0$ para qualquer valor de x.

Item III – **VERDADEIRO**.

Veja a função h(x).

$$h(x) = \ln|g(x)|$$
$$h(x) = \ln\left|-2e^{-0,5x}\right|$$
$$h(x) = \ln 2e^{-0,5x}$$
$$h(x) = \ln 2 + \ln e^{-0,5x}$$
$$h(x) = \ln 2 - 0,5x$$

Para haver intersecção das curvas das funções $f(x)$ e $g(x)$, é necessário:

$$f(x) = h(x)$$
$$ax^2 + 3x - 2 = \ln 2 - 0,5x$$
$$ax^2 + 3,5x - 2 - \ln 2 = 0$$

Uma intersecção significa que a equação do segundo grau acima precisa ter apenas uma raiz real, ou seja:

$$\Delta = 0$$

$$3{,}5^2 - 4 \times a \times (-2 - \ln 2) = 0$$

$$12{,}25 + 4a(2 + \ln 2) = 0$$

$$4a(2 + \ln 2) = 0 - 12{,}25$$

$$a = -\frac{12{,}25}{4(2 + \ln 2)}$$

$$a = \left[-\frac{12{,}25}{4(2 + \ln 2)}\right] \times \frac{100}{100}$$

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{16(2 + \ln 2)}}$$

Item IV – **VERDADEIRO**.

Vamos analisar a função $h(x)$.

$$h(x) < 0$$

$$\ln 2 - 0{,}5x < 0$$

$$-0{,}5x < -\ln 2$$

$$0{,}5x > \ln 2$$

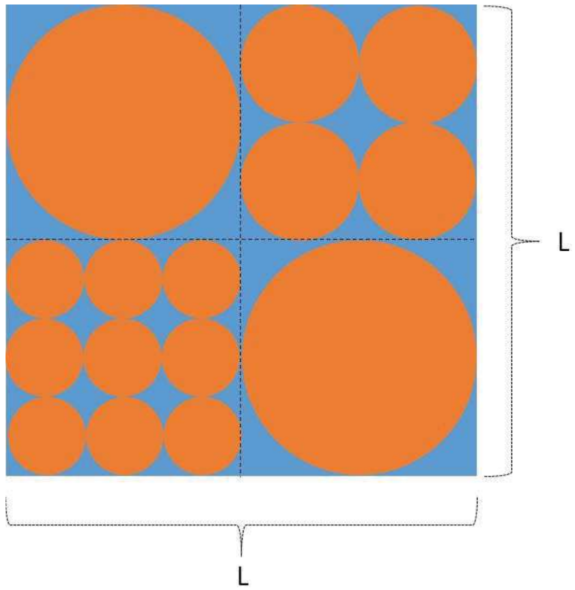
$$x > \frac{\ln 2}{0{,}5}$$

$$x > 2 \ln 2$$

Questão 06

Letra: **B**

Vejamos a figura:



Área total: $A = L^2$.

Área Laranja: Composta pela área de 2 círculos grande de raio $R_G = \frac{L}{4}$, 4 círculos médios de raio $R_M = \frac{L}{8}$ e 9 círculos pequenos de $R_P = \frac{L}{12}$.

$$A_{laranja} = 2 \times (\pi R_G^2) + 4 \times (\pi R_M^2) + 9 \times (\pi R_P^2)$$

$$A_{laranja} = 2 \times \left[\pi \left(\frac{L}{4}\right)^2\right] + 4 \times \left[\pi \left(\frac{L}{8}\right)^2\right] + 9 \times \left[\pi \left(\frac{L}{12}\right)^2\right]$$

$$A_{laranja} = \frac{2\pi L^2}{16} + \frac{4\pi L^2}{64} + \frac{9\pi L^2}{144}$$

$$A_{laranja} = \frac{\pi L^2}{8} + \frac{\pi L^2}{16} + \frac{\pi L^2}{16}$$

$$A_{laranja} = \pi L^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)$$

$$A_{laranja} = \frac{\pi L^2}{4}$$

Área Azul: Diferença entre a área total e a área laranja.

$$A_{azul} = A - A_{laranja}$$

$$A_{azul} = L^2 - \frac{\pi L^2}{4}$$

$$A_{azul} = L^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A_{azul} = L^2\left(\frac{4-\pi}{4}\right)$$

$$A_{azul} = \frac{L^2(4-\pi)}{4}$$

Calculando a razão pedida:

$$\frac{A_{laranja}}{A_{azul}} = \frac{\frac{\pi L^2}{4}}{L^2\left(\frac{4-\pi}{4}\right)} = \frac{\pi L^2}{4} \times \frac{4}{L^2(4-\pi)} = \frac{\pi}{4-\pi}$$

Questão 07

Letra: **D**

Analisando a situação dos carros:

- O primeiro automóvel passa pela origem a cada dez minutos; assim após dar m voltas, ele passará pela origem $10m$ minutos após sua partida.

- O segundo automóvel passa pela origem a cada doze minutos; assim após dar n voltas, ele passará pela origem $(12n + 2)$ minutos após a partida do primeiro automóvel.

- O terceiro automóvel passa pela origem a cada dezesseis minutos; assim após dar p voltas, ele passará pela origem $(16p + 4)$ minutos após a partida do primeiro automóvel.

Para que o primeiro e o terceiro automóvel passem juntos pela origem é necessário:

$$10m = 16p + 4$$

Resolução numérica:

Número de Voltas	**Automóvel 1** $\boldsymbol{Tempo = 10m}$	**Automóvel 3** $\boldsymbol{Tempo = 16p + 4}$
1	10	**20**
2	**20**	36
3	30	52
4	40	68
5	50	84
6	60	**100**
7	70	116
8	80	132
9	90	148
10	**100**	164

O segundo encontro na origem entre o automóvel 1 e o automóvel 3 dar-se-á em 100 minutos, ou seja, pela tabela acima vemos que para este segundo encontro ocorrer (números em vermelho):

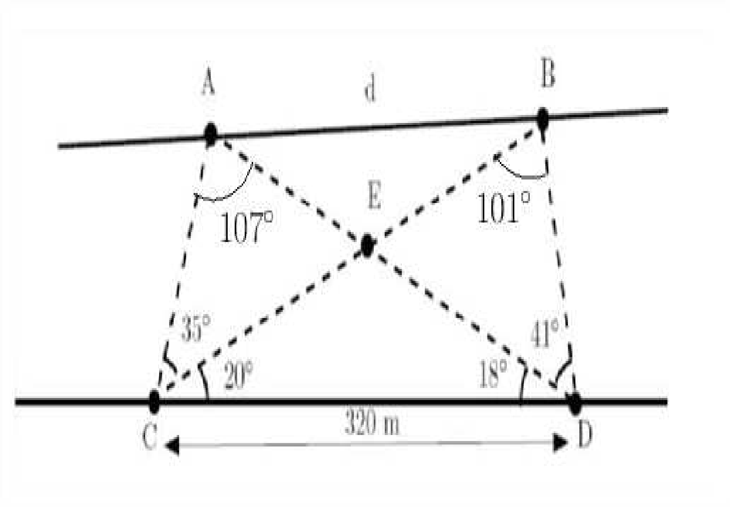
- Automóvel 1: Décima volta (tempo de 10 voltas: $10 \times 10 = 100\ minutos$)
- Automóvel 2: Sexta volta (tempo de 6 voltas: $16 \times 6 + 4 = 100\ minutos$)

Questão 8

Resposta: 204

Solução:

A figura abaixo representa a situação do problema.



Aplicando a *lei dos senos* ao triângulo ΔBCD, temos que:

$$\frac{\bar{BC}}{\text{sen}(59°)} = \frac{320}{\text{sen}(101°)} \Rightarrow \bar{BC} = 320 \cdot \frac{\text{sen}(59°)}{\text{sen}(101°)}$$

Aplicando a *lei dos senos* ao triângulo ΔACD, temos que:

$$\frac{\bar{AC}}{\text{sen}(18°)} = \frac{320}{\text{sen}(107°)} \Rightarrow \bar{AC} = 320 \cdot \frac{\text{sen}(18°)}{\text{sen}(107°)}$$

Aplicando a *lei dos cossenos* ao triângulo ΔABC, nós temos que:

$$\begin{aligned}
d^2 &= (\bar{BC})^2 + (\bar{AC})^2 - 2\bar{AC} \cdot \bar{BC} \cdot \cos(35°) \\
d^2 &= \left(320 \cdot \frac{\text{sen}(59°)}{\text{sen}(101°)}\right)^2 + \left(320 \cdot \frac{\text{sen}(18°)}{\text{sen}(107°)}\right)^2 - 2 \cdot 320 \cdot \frac{\text{sen}(59°)}{\text{sen}(101°)} \cdot 320 \cdot \frac{\text{sen}(18°)}{\text{sen}(107°)} \cdot \cos(35°) \\
d^2 &= 41435.127 \\
\Rightarrow d &= \sqrt{41435.127} \\
\Rightarrow d &= 203.55 \Rightarrow d \approx 204
\end{aligned}$$

Questão 09

Letra: **A**

A primeira condição imposta no problema é a função ter duas raízes (zeros da função). Para isto é necessário:

$$\Delta > 0$$
$$4 - 4a^2 > 0$$
$$-1 < a < 1 \quad \textbf{Condição (I)}$$

Por outro lado, -2 não deve ser um zero e, portanto:

$$f(-2) = 5a - 4 \neq 0$$
$$a \neq \frac{4}{5} \quad \textbf{Condição (II)}$$

Consideremos as duas possibilidades para os valores de a, de acordo com as condições **(I)** e **(II)**, vamos analisar cada

- Se $-1 < a < 0$.

  Neste caso, a parábola tem concavidade para baixo e devemos ter $f(-2) > 0$, o que implica que $a > 4/5$. O que não é possível, pois a hipótese inicial era o valor de a negativo.

- Se $0 < a < 1$

  Neste caso, a parábola tem concavidade para cima e devemos ter $f(-2) < 0$, o que implica que $a < 4/5$.

  Portanto, devemos ter $0 < a < \frac{4}{5}$, ou seja, $0 < a < 0{,}8$.

Questão 10

Alternativa: D

Solução:

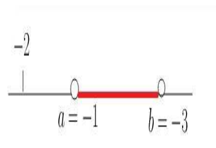
Vamos analisar cada critério independentemente.

(I) Se $\sqrt{\dfrac{|x-a|}{|x-b|}} < 1$ (FALSO !)

Contra-exemplo:

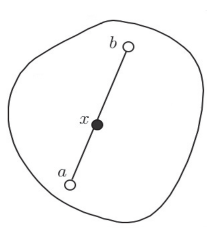
Basta tomar $a = -1$ e $b = 3$. Se $x = -2$, veja que:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{|x-a|}{|x-b|}} &= \sqrt{\frac{|-2-(-1)|}{|-2-3|}}\\ &= \sqrt{\frac{|-2+1|}{|-5|}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{5}} < 1, \text{ mas } -2 \text{ não está entre } -1 \text{ e } 3\end{aligned}$$



(II) Se $\dfrac{x-a}{x-b} \cdot \left(\dfrac{x-a}{x-b} - 1\right) < 0$ (VERDADEIRO !)

A ideia deste teste é utilizar a noção de conjunto convexo, parametrizando o segmento que une a até b e verificando se x está no segmento.



Se existe um λ real, com $\lambda > 0$ e $\lambda \in (0,1)$, tal que

$$x = \lambda \cdot b + (1-\lambda) \cdot a \Rightarrow a < x < b$$

Vamos resolver a equação $x = \lambda \cdot b + (1 - \lambda) \cdot a$ explicitamente para λ.

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cdot b + (1-\lambda)\cdot a \\ x &= \lambda \cdot b + a - \lambda \cdot a \\ x - a &= \lambda b - \lambda a \\ x - a &= \lambda(b-a) \Rightarrow \lambda = \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

Um fato matemático trivial que temos é que se $\lambda^2 - \lambda < 0 \Rightarrow \lambda \in (0,1)$, e isto implica que $a < x < b$. Neste sentido, $\lambda^2 - \lambda < 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) < 0$.

Substituindo $\lambda = \dfrac{x-a}{b-a}$ na equação acima, nós temos que:

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda-1) &< 0 \\ \frac{x-a}{b-a}\left(\frac{x-a}{b-a} - 1\right) &< 0 \Rightarrow a < x < b \end{aligned}$$

(III) $(x-a)\cdot(x-b) < 0$ VERDADEIRO!

Podemos interpretar as desigualdades $a < x < b$ como:

$$\underbrace{a < x}_{0 < x-a} \text{ e } \underbrace{< b}_{x-b<0}$$

Ou seja,

$$x - a > 0 \quad \text{e} \quad x - b < 0$$

$$\text{se} \quad \underbrace{(x-a)}_{positivo} \cdot \underbrace{(x-b)}_{negativo} < 0 \Rightarrow a < x < b$$

(IV) $x < \frac{a+b}{2}$ FALSO!

Contra-exemplo:

Basta tomar $a = 2$ e $b = 4$.

Se $x = 0$, veja que

$$x < \frac{a+b}{2}$$

$$0 < \underbrace{\frac{2+4}{2}}_{3}, \quad \text{mas} \quad 0 \quad \text{não está entre} \quad 2 \quad \text{e} \quad 4$$