Questão 01

Letra: **D**

Primeiramente deve-se perceber que o diâmetro da coroa dianteira é 5 vezes maior que o diâmetro da coroa traseira. Ou seja, a razão (R) entre os diâmetros vale:

$$R = \frac{20\ cm}{4\ cm} = 5$$

Isto significa que quando a coroa dianteira dá 1 volta completa, a coroa traseira dá 5 voltas. Como a roda traseira está acoplada a coroa traseira, ligadas pelo centro, a roda traseira também efetua 5 voltas quando é dado uma pedalada (1 volta completa da coroa dianteira).

Logo, a distância percorrida (d) pela bicicleta corresponde ao comprimento percorrido por 5 voltas da roda traseira, cujo raio vale $40\ cm$, ou seja, $0{,}4\ m$.

$$d = 5 \times C_{Roda\ Traseira}$$
$$d = 5 \times (2 \times \pi \times R_{Roda\ Traseira})$$
$$d = 5 \times (2 \times \pi \times 0{,}40)$$
$$d \cong 12{,}6\ m$$

Questão 02

Resposta: **0**

A área de sobra corresponde a área do quadrado de lado $4\,m$ (chapas quadradas) menos a área das tampas fabricadas.

- Área da placa: $A_P = 4 \times 4 = 16\,m^2$.
- Área de uma tampa grande: $A_{TG} = \pi \times 2^2 = 4\pi\,m^2$.
- Área de uma tampa média: $A_{TM} = \pi \times 1^2 = \pi\,m^2$.
- Área de uma tampa pequena: $A_{TP} = \pi \times 0{,}5^2 = 0{,}25\pi\,m^2$.

A área da sobra de cada tipo de fabricação de tampa será dada por:

- Sobra (tampa grande): $S_G = 16 - 1 \times (4\pi) = (16 - 4\pi)\,m^2$.
- Sobra (tampa média): $S_M = 16 - 4 \times (\pi) = (16 - 4\pi)\,m^2$.
- Sobra (tampa pequena): $S_P = 16 - 16 \times (0{,}25\pi) = (16 - 4\pi)\,m^2$.

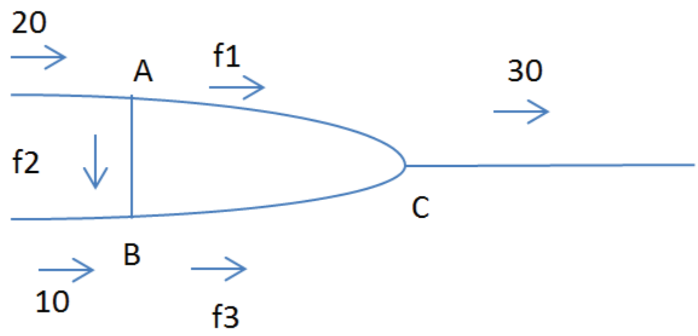
Note que as sobras das produções de tampas são todas iguais. Então podemos dizer que: $S_G = S_M = S_P = S$. Logo o valor de x será:

$$x = S_G - (2 \times S_M) + S_P$$
$$x = S - (2 \times S) + S$$
$$x = S - 2S + S$$
$$\boldsymbol{x = 0}$$

Questão 03

Letra: **A**

Vamos analisar a figura apresentada:



Como se trata de fluxo de água, temos que todos os valores devem ser positivos.

- $f1 > 0$
- $f2 > 0$
- $f3 > 0$

Em cada cruzamento devemos considerar que a quantidade de água que entra é igual a quantidade de água que sai. Logo:

$$\begin{cases} 20 = f1 + f2 \\ f2 + 10 = f3 \\ f1 + f3 = 30 \end{cases}$$

Reorganizando o sistema temos:

$$\begin{cases} f1 + f2 = 20 \\ f2 - f3 = -10 \\ f1 + f3 = 30 \end{cases}$$

Isolando $f3$ nas equações 2 e 3 temos:

- $f3 = 10 + f2$ (Condição A)
- $f3 = 30 - f1$ (Condição B)

Analisando as condições:

- Da condição A tiramos que $f3 \geq 10$.
- Da condição B tiramos que $f3 \leq 30$. Note que é possível $f1$ ser zero, pois o fluxo de valor 20 poderia passar todo por $f2$ e nada em $f1$. Se $f1$ for diferente de zero, o valor de $f3$ diminui.

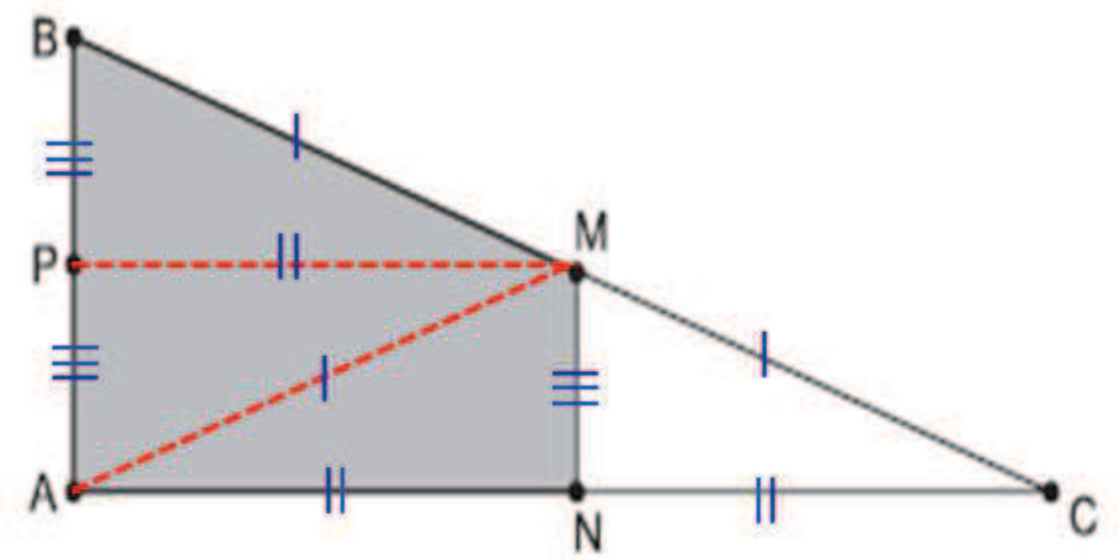
Logo:

- **Valor mínimo de f3:** 10
- **Valor máximo de f3:** 30

Questão 04

Resposta: **75**

Observe que o triangulo ABC pode ser dividido em quatro triângulos iguais (MNC, BPM, MNA e APM) conforme ilustrado na figura abaixo.



Seja X o valor da área do triângulo MNC, então teremos:

- Área do triângulo ABC: $A_{ABC} = 4X$
- Área do quadrilátero ABMN: $A_{ABMN} = 3X$

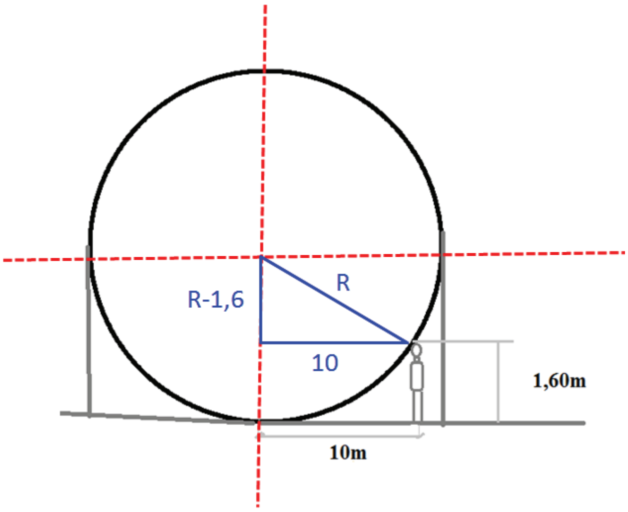
Logo, a razão pedida, em porcentagem será:

$$\left(\frac{A_{ABMN}}{A_{ABC}}\right) \times 100\% = \left(\frac{3X}{4X}\right) \times 100\% = \left(\frac{3}{4}\right) \times 100\% = \mathbf{75\%}$$

Questão 05

Letra: **B**

Primeiramente devemos determinar o volume do reservatório esférico e para isso precisamos encontrar o raio da esfera. A figura abaixo ajuda a ilustrar a situação.



Usando o Teorema de Pitágoras, podemos achar o valor de R no triângulo azul definido acima na figura.

$$R^2 = (R - 1{,}6)^2 + 10^2$$

$$R^2 = R^2 - 2 \times R \times 1{,}6 + 1{,}6^2 + 100$$

$$R^2 - R^2 + 3{,}2R - 2{,}56 - 100 = 0$$

$$3{,}2R = 102{,}56$$

$$R = \frac{102{,}56}{3{,}2} = 32{,}05\ m$$

O volume do reservatório será:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$V = \frac{4 \times \pi \times 32{,}05^3}{3}$$

$$V \cong 137.903\ m^3$$

Como a cidade gasta $20.000\ m^3$ de água por hora, o volume de água no reservatório irá durar aproximadamente **7 horas**.

$$t = \frac{Volume\ Reservatório}{Consumo\ por\ Hora} = \frac{137.903\ m^3}{20.000\ m^3/h} \cong \boldsymbol{7\ horas}$$

Para que não falte água, o volume do reservatório deveria durar 12 horas (tempo sem água para abastecer). Nesse caso, o consumo deveria ser:

$$Novo\ Consumo = \frac{137.903\ m^3}{12\ h} \cong 11.492\ m^3/h$$

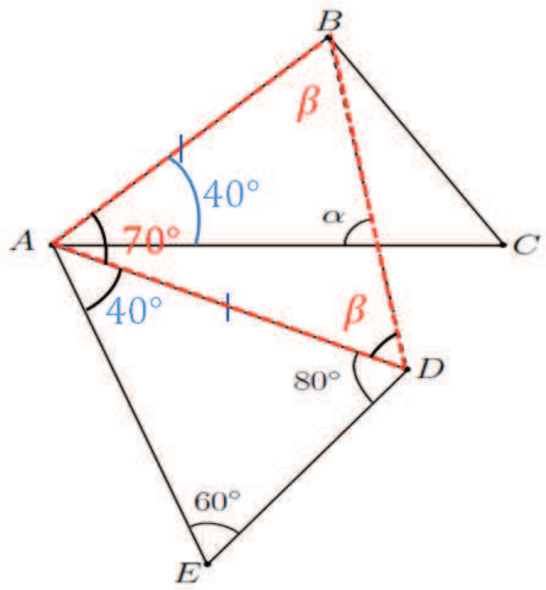
Para ter esse consumo, seria necessária uma economia de $8.508\ m^3/h$, que equivale a aproximadamente 43% do consumo atual de $20.000\ m^3/h$.

$$\frac{8.508}{20000} \cong 0{,}43 = 43\%$$

Questão 06

Resposta: **85**

Vamos analisar a figura abaixo:



Note que o triângulo ABC é o mesmo triângulo ADE. O triângulo só foi girado. Logo os valores dos ângulos no triângulo ABC valem: $\hat{B} = 80°$, $\hat{C} = 60°$ e $\hat{A} = 40°$ (descoberto usando a soma dos ângulos internos no triângulo ADE).

$$\hat{A} + 60° + 80° = 180°$$
$$\hat{A} = 180° - 60° - 80°$$
$$\hat{A} = 40°$$

O triângulo destacado em vermelho ABD é isósceles, pois $AB = AD$. Neste caso, e sabendo que a rotação foi de $70°$, podemos calcular primeiro o ângulo β marcado na figura usando a soma dos ângulos internos de um triângulo.

$$\beta + \beta + 70° = 180°$$
$$2\beta = 180° - 700°$$
$$2\beta = 110°$$
$$\beta = \frac{110°}{2}$$
$$\beta = 55°$$

Na sequência podemos usar o outro triângulo, que contém o ângulo α pedido na questão, e aplicar a soma dos ângulos internos novamente.

$$\alpha + \beta + 40° = 180°$$
$$\alpha + 55° + 40° = 180°$$
$$\alpha = 180° - 55° - 40°$$
$$\boldsymbol{\alpha = 85°}$$

Questão 07

Resposta: Alternativa (b)

Vamos calcular as taxas de crescimentos populacionais ao longo dos sete períodos. Indexando a taxa de crescimento do n-ésimo período por i_j. Ao longo dos sete períodos, teremos que:

$$\begin{aligned}
i_1 &= \sqrt[10]{\frac{P(1950)}{P(1940)}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{152547}{129940}} - 1 = 0.0161 \Rightarrow i_1 = 0.0161 \\
i_2 &= \sqrt[10]{\frac{P(1960)}{P(1950)}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{219303}{152547}} - 1 = 0.0369 \Rightarrow i_2 = 0.0369 \\
i_3 &= \sqrt[10]{\frac{P(1970)}{P(1960)}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{375864}{219303}} - 1 = 0.0553 \Rightarrow i_3 = 0.0553 \\
i_4 &= \sqrt[10]{\frac{P(1980)}{P(1970)}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{664559}{375864}} - 1 = 0.0586 \Rightarrow i_4 = 0.0586 \\
i_5 &= \sqrt[11]{\frac{P(1991)}{P(1980)}} - 1 = \sqrt[11]{\frac{847595}{664559}} - 1 = 0.0223 \Rightarrow i_5 = 0.0223 \\
i_6 &= \sqrt[9]{\frac{P(2000)}{P(1991)}} - 1 = \sqrt[9]{\frac{969396}{847595}} - 1 = 0.0150 \Rightarrow i_6 = 0.0150 \\
i_7 &= \sqrt[10]{\frac{P(2010)}{P(2000)}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{1080113}{969396}} - 1 = 0.0108 \Rightarrow i_7 = 0.0108
\end{aligned}$$

Cálculo das variações absolutas das taxas de crescimentos:

$$\begin{aligned}
VA_1 &= i_2 - i_1 \Rightarrow VA_1 = 0.0369 - 0.0161 \Rightarrow\Rightarrow VA_1 = 0.0208 \\
VA_2 &= i_3 - i_2 \Rightarrow VA_2 = 0.0553 - 0.0369 \Rightarrow\Rightarrow VA_2 = 0.0184 \\
VA_3 &= i_4 - i_3 \Rightarrow VA_3 = 0.0586 - 0.0553 \Rightarrow\Rightarrow VA_3 = 0.0033 \\
VA_4 &= i_5 - i_4 \Rightarrow VA_3 = 0.0223 - 0.0586 \Rightarrow\Rightarrow VA_4 = -0.0363 \\
VA_5 &= i_6 - i_5 \Rightarrow VA_3 = 0.0150 - 0.0223 \Rightarrow\Rightarrow VA_5 = -0.0073 \\
VA_6 &= i_7 - i_6 \Rightarrow VA_3 = 0.0108 - 0.0150 \Rightarrow\Rightarrow VA_6 = -0.0042
\end{aligned}$$

Cálculos das variações relativas das taxas de crescimento:

$$
\begin{aligned}
VR_1 &= \frac{VA_1}{i_1} = \frac{0.0208}{0.0161} = 1.2919 VR_1 = 1.2919 \\
VR_2 &= \frac{VA_2}{i_2} = \frac{0.0184}{0.0369} = 0.4986 VR_2 = 0.4986 \\
VR_3 &= \frac{VA_3}{i_3} = \frac{0.0033}{0.0553} = 0.0596 VR_3 = 0.0596 \\
VR_4 &= \frac{VA_4}{i_4} = \frac{-0.0363}{0.0586} = 0.6194 VR_4 = -0.6194 \\
VR_5 &= \frac{VA_5}{i_5} = \frac{-0.0073}{0.0223} = 0.3273 VR_5 = -0.3273 \\
VR_6 &= \frac{VA_6}{i_6} = \frac{-0.0042}{0.0150} = -0.2800 VR_5 = -0.2800
\end{aligned}
$$

A variação relativa média é dada por:

$$
\begin{aligned}
VR_{\text{média}} &= \frac{\sum_{i=1}^{6} V_i}{6} \\
&= \frac{1.2919 + 0.4986 + 0.0596 + (-0.6194) + (-0.3273) + -0.2800}{6} \\
&= 0.1033 \Rightarrow VR_{\text{média}} = 10.33\%
\end{aligned}
$$

Questão 08

Resposta: **255**

Vamos chamar nesse problema a quantidade de q e o preço de p. Pela informação do problema temos que:

Quantidade (q)	Preço (p)
4.000	5
3.600	6

Temos que o preço e quantidade são grandezas proporcionais, ou seja, seguem uma relação linear. Dessa forma podemos escrever uma função de primeiro grau que calcula a quantidade vendida em função do preço.

$$q = Ap + B$$

Vamos determinar o coeficiente angular (A) e o coeficiente linear (B) com os dados da tabela. Montando um sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} 4000 = 5A + B \\ 3600 = 6A + B \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

- Isola B na primeira equação: $B = 4000 - 5A$
- Substitui B na segunda equação:

$$3600 = 6A + (4000 - 5A)$$
$$3600 = 6A + 4000 - 5A$$
$$3600 - 4000 = A$$
$$A = -400$$

- Substitui o valor encontrado para A na equação isolada para B, no primeiro passo.

$$B = 4000 - 5 \times (-400)$$
$$B = 4000 + 2000$$
$$B = 6000$$

A função que descreve a relação entre a quantidade e o preço será:

$$\boldsymbol{q = -400p + 6000}$$

Agora, precisamos escrever o lucro do fabricante. Sabemos que o lucro é a diferença entre a receita (quantidade de dinheiro que entra) e o custo (dinheiro gasto) para fabricar os DVDs.

$$Lucro = Receita - Custo$$

A receita (R) será a quantidade vendida multiplicada pelo preço de uma unidade.

$$R = q \times p$$

$$R = (-400p + 6000) \times p$$

$$R = -400p^2 + 6000p$$

O custo (C) será o custo de produzir uma unidade (R$ 2,00) multiplicado pela quantidade.

$$C = 2 \times q$$

$$C = 2 \times (-400p + 6000)$$

$$C = -800p + 12000$$

Substituindo a receita e o custo no lucro (L), temos:

$$L = (-400p^2 + 6000p) - (-800p + 12000)$$

$$L = -400p^2 + 6000p + 800p - 12000$$

$$L = -400p^2 + 6800p - 12000$$

Se o lucro é nulo, significa que $L = 0$. Resolvendo a equação acima com $L = 0$, temos:

$$-400p^2 + 6800p - 12000 = 0$$

Podemos dividir todos os termos por -400.

$$p^2 - 17p + 30 = 0$$

$$p = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \times 1 \times 30}}{2 \times (1)}$$

$$p = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 120}}{2}$$

$$p = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$p = \frac{17 \pm 13}{2}$$

Logo, os valores p_1 e p_2 são:

- $p_1 = \frac{17+13}{2} = \frac{30}{2} = 15$
- $p_2 = \frac{17-13}{2} = \frac{4}{2} = 2$

O preço que faz o lucro ser máximo corresponde ao valor de preço que será o vértice da parábola. Calculando o preço do vértice (p_0):

- $p_0 = \frac{-(6800)}{2\times(-400)} = \frac{-6800}{-800} = 8{,}5$

Calculando o valor de R, pedido no problema:

$$R = p_0 \times p_1 \times p_2$$

$$R = 8{,}5 \times 15 \times 2$$

$$\boldsymbol{R = 255}$$

Questão 09

Resposta:

Como consideramos N esferas de raio igual a 5 centímetros e alojamos tais esferas em uma caixa de altura $h = 10$, isto implica que teremos essencialmente uma camada de esferas na caixa.

Como cada caixa C_1 comporta no máximo 6 esferas e se usarmos x caixas C_1 ficam sobrando 2 esferas, ento:

$$N = x6 + 2$$

Como cada caixa C_2 comporta no máximo 7 esferas e se usarmos y caixas C_2 ficam sobrando 3 esferas, ento:

$$N = y7 + 3$$

Para $y = 5$, temos que $N = 5 \cdot 7 + 3 \Rightarrow N = 38.$ Voltando na primeira equção, temos que:

$$38 = x6 + 2 \Rightarrow x = 6$$

Para obtermos os próximos números que satisfazem o sistema de equações $\left\{ \begin{array}{lcl} N & = & x6 + 2 \\ N & = & y7 + 3 \end{array} \right.$, nós devemos somar os múltiplos de 42 $(\mathrm{mmc}(6,7))$. Desta forma, o maior número, menor do que 300 que satisfaz tal propriedade é igual a:

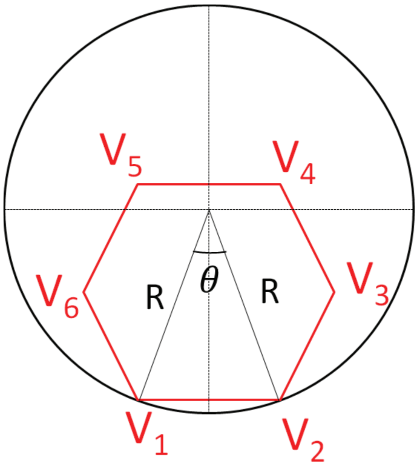
$$N = 38 + 6 \cdot 42 = 252 + 38 = 290$$

Então $N = 290$.

Questão 10

Resposta: **8**

A figura abaixo ilustra o problema da questão. O primeiro passo é encontrar o comprimento do arco de circunferência que corresponde a distância entre dois vértices do hexágono. Ou seja, o lado L do hexágono irá tocar a circunferência em dois pontos, cujo comprimento de arco é $C_L = R\theta$ (veja a figura). Veja que o valor C_L é o arco formado entre o vértice V_1 e V_2 (todos os arcos serão iguais, pois os lados do hexágono são iguais).



O percurso total de uma volta completa do hexágono irá gerar um arco C dado por:

$$C = 6 \times (R\theta)$$

Sabemos que $C + \frac{\pi}{4}R = 2\pi R$ (uma circunferência completa).

$$6R\theta + \frac{\pi}{4}R = 2\pi R$$

$$R\left(6\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi R$$

$$6\theta + \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

$$\theta = \frac{7\pi}{24}$$

Para que o vértice 1 volte a tocar o mesmo ponto inicial, serão necessários N rotações dos lados do hexágono. Nesse caso, precisamos ter um múltiplo natural M de circunferência completa.

$$N \times (6R\theta) = M \times (2\pi R)$$

$$N \times 6\theta = M \times 2\pi$$

$$N \times 6 \times \frac{7\pi}{24} = M \times 2\pi$$

$$N \times \frac{7}{4} = M \times 2$$

$$7N = 8M$$

Como N e M são números naturais, os menores valores que satisfazem a condição são:

- $\boldsymbol{N = 8}$
- $M = 7$

Ou seja, o hexágono precisará completar 8 rotações em torno do seu centro.