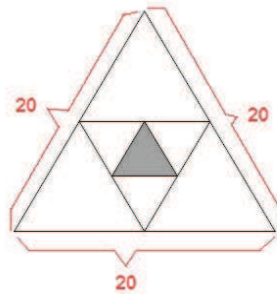


Questão 1

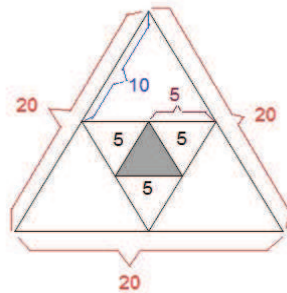
Resposta: 15

Solução:

Como o perímetro do triângulo maior é igual a 60 centímetros, então o lado do triângulo maior é igual a 20 centímetros.



Dado que os triângulos circunscritos são equiláteros, temos a seguinte situação, representada na figura abaixo:



Neste sentido, o perímetro do triângulo hachurado é dado por:

$$+5 + 5 = 15 \text{ cm}$$

Questão 2

Resposta: 91

Solução:



Questão 3

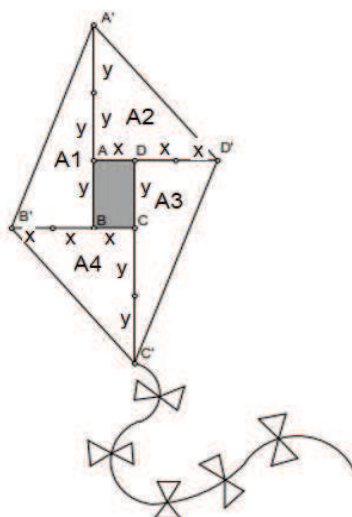
Resposta: 260

Solução:

Denotando os lados do retângulo por x e y , conforme a figura abaixo, temos que a área do retângulo é dada por:

$$A_r = x \cdot y$$

Como $A_r = 20 \Rightarrow x \cdot y = 20$



As áreas dos quatro triângulos retângulos da figura são dadas por:

$$A_1 = \frac{2x \cdot 3y}{2} \Rightarrow A_1 = 3xy$$

$$A_2 = \frac{3x \cdot 2y}{2} \Rightarrow A_2 = 3xy$$

$$A_3 = \frac{2x \cdot 3y}{2} \Rightarrow A_3 = 3xy$$

$$A_4 = \frac{3x \cdot 2y}{2} \Rightarrow A_4 = 3xy$$

Neste sentido a área da pipa é dada por:

$$\begin{aligned}A_R + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= xy + 3xy + 3xy + 3xy + 3xy \\ &= \underbrace{xy}_{20} (1 + 3 + 3 + 3 + 3) \\ &= 20 \cdot (13) \\ &= 260\end{aligned}$$

A área da pipa construída por Eduard é igual a 260 cm².

Questão 4

Resposta: 7636

Solução:

Seja n o número representado pelo numeral $n = ab$. Então o *espelho* do número n é representado pelo numeral $n_{\text{espelho}} = ba$.

Temos que:

$$\begin{aligned}n + n_{\text{espelho}} &= \underbrace{ab} + \underbrace{ba} \\ &= (b + 10a) + (a + 10b) \quad (\text{pela representação em base 10}) \\ &= 11a + 11b \\ n + n_{\text{espelho}} &= 11 \cdot (a + b)\end{aligned}$$

Como $n + n_{\text{espelho}}$ deve ser um quadrado perfeito, então $a + b$ deve ser igual a 11. Como $1 \leq a \leq 9$ e $0 \leq b \leq 9$, então para que se cumpra a condição $a + b = 11$, temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{aligned}&\underbrace{a + b} \\ &2 + 9 \\ \text{ou } &3 + 8 \\ \text{ou } &4 + 7 \\ \text{ou } &5 + 6 \\ \text{ou } &6 + 5 \\ \text{ou } &7 + 4 \\ \text{ou } &8 + 3 \\ \text{ou } &9 + 2\end{aligned}$$

Neste sentido, os maiores números de dois algarismos que cumprem com a propriedade

“A soma do número n com o seu espelho é um quadrado perfeito”
são:

83 e 92

Logo,

$$83 \cdot 92 = 7636$$

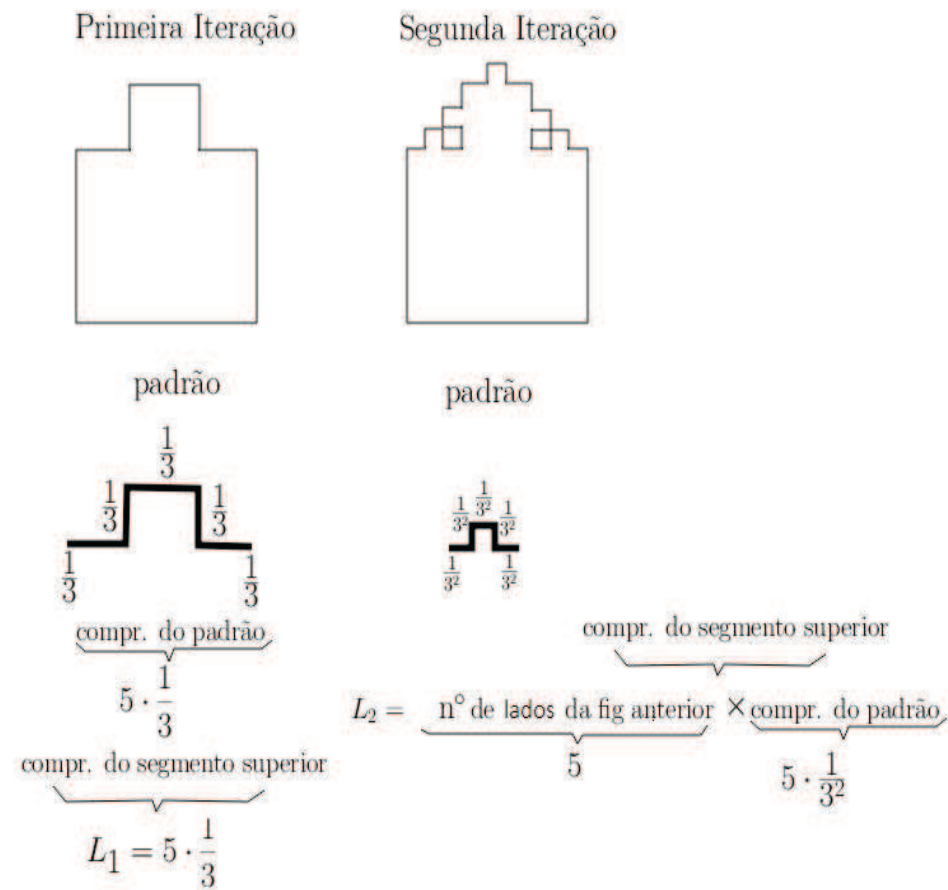
Questão 5

Resposta: 9

Solução:

A cada iteração do processo, em cada “lado” da figura anterior, brota um quadrado, cujo lado é o comprimento do “lado” da figura anterior dividido por 3.

Abaixo ilustramos as duas primeiras iterações do processo:



Neste sentido, o comprimento do segmento superior irá satisfazer a relação:

número de lados da figura anterior \times comprimento do padrão

Ou seja,

$$\begin{aligned}L_2 &= 5 \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{3^2}\right) \Rightarrow L_2 = \frac{5^2}{3^2} \\L_3 &= (5 \cdot 5) \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{3^3}\right) \Rightarrow L_3 = \frac{5^3}{3^3} \\&\vdots \quad \vdots \\&\Rightarrow L_n = \frac{5^n}{3^n}\end{aligned}$$

Neste sentido, teremos que o perímetro da *figura catedral* na n -ésima iteração será dado por:

$$\begin{aligned}P_n &= 3 + \underbrace{L_n} \\P_n &= 3 + \frac{5^n}{3^n}\end{aligned}$$

Queremos que o perímetro da figura catedral seja pelo menos igual a 93. Então, devemos ter que:

$$\begin{aligned}P_n &\geq 93 \\3 + \frac{5^n}{3^n} &\geq 93 \\&\Rightarrow \underbrace{\frac{5^n}{3^n}} \geq 93 - 3 \\&\Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^n \geq 90\end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da desigualdade, temos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}\left(\frac{5}{3}\right)^n &\geq \operatorname{Ln}(90) \\ n \cdot \operatorname{Ln}\left(\frac{5}{3}\right) &\geq \operatorname{Ln}(90) \\ n &\geq \frac{\operatorname{Ln}(90)}{\operatorname{Ln}\left(\frac{5}{3}\right)} \\ n &\geq 8.8088 \underbrace{\Rightarrow}_{n \in \mathbb{N}} n \geq 9\end{aligned}$$

Neste sentido, são necessárias 9 iterações do processo para que o perímetro da figura catedral seja pelo menos igual a 93.

Questão 06

Letra: **B**

Vamos analisar cada item, classificando-o como Verdadeiro ou Falso.

Item I: **VERDADEIRO.**

- Note que a função $g(x)$ é uma função exponencial de base 3. Para qualquer x , a função terá valor maior que zero.

Item II: **FALSO.**

- Note que: $g(0) = 3^0 = 1$.
- Logo, $f(g(0)) = f(1) = 1^2 + 1 - 6 = 1 + 1 - 6 = -4$.

Item III: **FALSO.**

- O vértice da parábola de uma função genérica de segundo grau do tipo:
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dado por: $x_v = -\frac{b}{a}$. Para a função $f(x)$ dada, temos que
 $x_v = -\frac{1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$.
- Aplicando a função $g(x)$ no valor x_v , temos: $g(x_v) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Note que o denominador não é um número inteiro, logo, $g(x_v)$ não é um número racional.

Item IV: **FALSO.**

- Se $g(x) = 1$, então:

$$3^x = 1$$

$$3^x = 3^0$$

$$x = 0$$

- Logo, $f(x) = f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6$.

Neste problema, temos então: $N_V = 1$ e $N_F = 3$. Logo, $N_V - N_F = 1 - 3 = -2$.

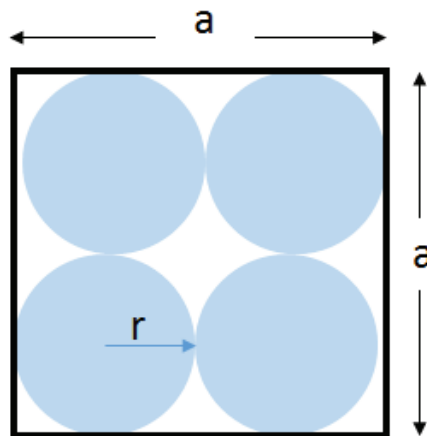
Questão 07

Resposta: **20**

O cubo tem lado a , logo seu volume é $V = a^3$.

Note que, se cabem oito esferas no cubo, significa que o raio de cada esfera será $r = \frac{a}{4}$.

Veja a vista de uma face do cubo.



O volume de cada esfera (V_e) será: $V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times \left(\frac{a}{4}\right)^3 = \frac{a^3}{16}$. Note que já foi usado a aproximação do valor de π para 3.

Logo, o volume de água (V_a) é dado por: $V_a = V - 8V_e = a^3 - 8\left(\frac{a^3}{16}\right) = a^3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a^3$.

Se foram usados 4 litros, temos que $4l = 4 \times 10^{-3} m^3$.

Então,

$$V_a = 4 \times 10^{-3}$$

$$\frac{1}{2}a^3 = 4 \times 10^{-3}$$

$$a^3 = 8 \times 10^{-3}$$

$$a = 2 \times 10^{-1}m = 0,2 m = 20 cm$$

Questão 08

Letra: **B**

Vamos analisar cada uma das alternativas:

A) INCORRETA.

Note que, se $\cos^2 \theta = 0,75$, então, $\cos \theta = \pm\sqrt{0,75} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Neste caso, sem nenhuma outra restrição, o ângulo θ pode pertencer a qualquer um dos quadrantes do círculo trigonométrico.

B) CORRETA.

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos(2\theta) = 2 \times 0,75 - 1$$

$$\cos(2\theta) = 1,5 - 1$$

$$\cos(2\theta) = 0,5$$

C) INCORRETA.

$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - 0,75$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = 0,25$$

$$\operatorname{sen} \theta = \pm\sqrt{0,25}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \pm 0,5$$

Ou seja, caso θ pertença ao 3º ou 4º quadrante, o valor do seno será $-0,5$.

D) INCORRETA.

$$\sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{0,75} = \frac{4}{3}$$

E) INCORRETA

$$\cos^2 \theta = \cos^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0,75.$$

$$\cos^2 \theta = \cos^2 120^\circ = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Note que θ pode ser 30° mas não pode ser 120° .

Questão 09

Resposta: **75**

Sejam a, b, c, d, e e f os seis números inteiros. Temos que

$$\frac{a + b + c + d + e + f}{6} = 15$$

Logo:

$$a + b + c + d + e + f = 90$$

Um desses números, digamos o número a , seja o maior possível. Ele será o maior, se, e somente se, a soma dos demais for a menor soma possível.

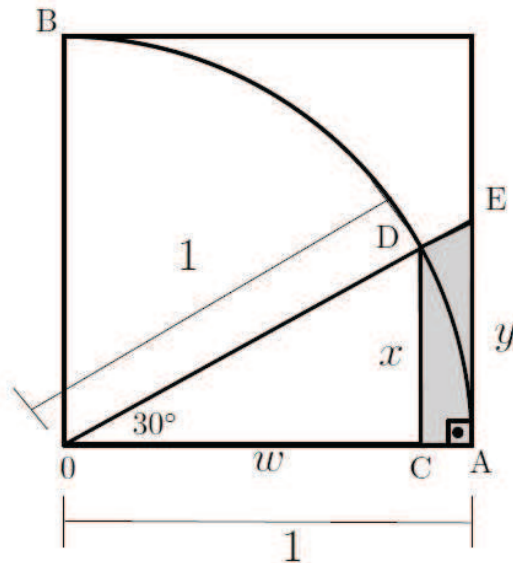
Isto ocorre para

$$b + c + d + e + f = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Portanto, $a = 90 - 15 = 75$.

Questão 10

Letra: C



Usando relações trigonométrica nos triângulos retângulos OCD e OAE, temos que:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{1} \rightarrow x = 1/2$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{w}{1} \rightarrow w = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan } 30^\circ = \frac{y}{1} \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim, teremos que a área A será:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$

$$A = \frac{\left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{6}\right) \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$

$$A = \frac{\left(\frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sqrt{3} + 6 - 3\sqrt{3}}{12}\right)}{2}$$

$$A = \frac{(4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3})}{24} = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

