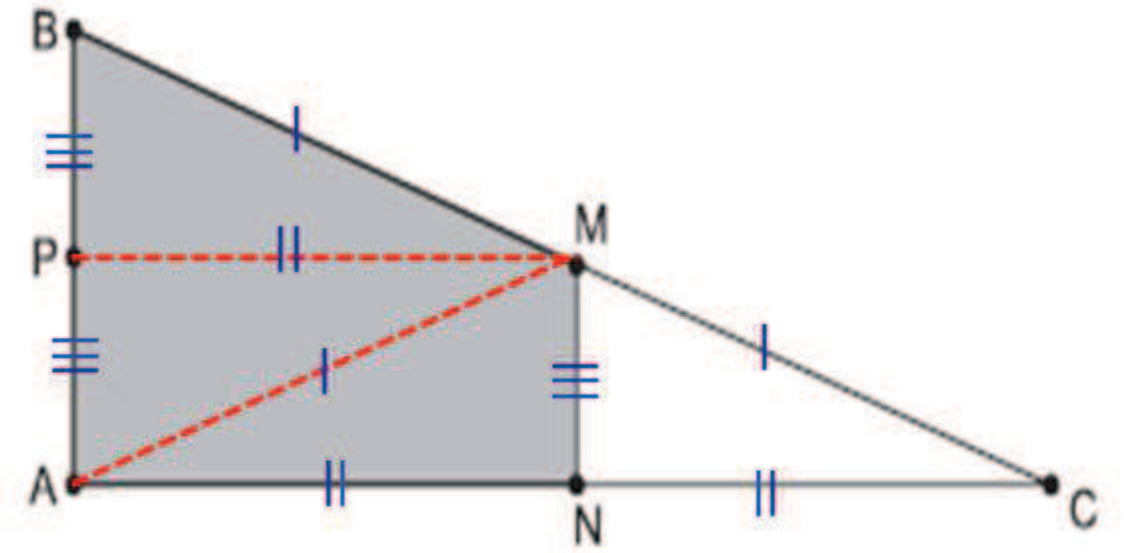
Questão 01

Resposta: **75**

Observe que o triangulo ABC pode ser dividido em quatro triângulos iguais (MNC, BPM, MNA e APM) conforme ilustrado na figura abaixo.



Seja X o valor da área do triângulo MNC, então teremos:

- Área do triângulo ABC: $A_{ABC} = 4X$
- Área do quadrilátero ABMN: $A_{ABMN} = 3X$

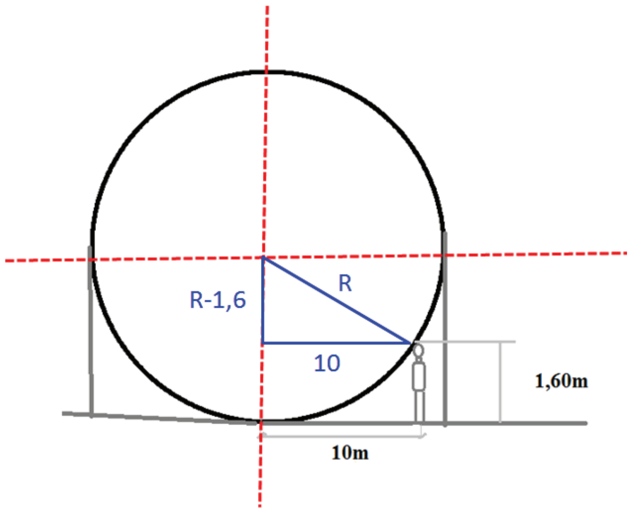
Logo, a razão pedida, em porcentagem será:

$$\left(\frac{A_{ABMN}}{A_{ABC}}\right) \times 100\% = \left(\frac{3X}{4X}\right) \times 100\% = \left(\frac{3}{4}\right) \times 100\% = \mathbf{75\%}$$

Questão 02

Letra: **B**

Primeiramente devemos determinar o volume do reservatório esférico e para isso precisamos encontrar o raio da esfera. A figura abaixo ajuda a ilustrar a situação.



Usando o Teorema de Pitágoras, podemos achar o valor de R no triângulo azul definido acima na figura.

$$R^2 = (R - 1{,}6)^2 + 10^2$$

$$R^2 = R^2 - 2 \times R \times 1{,}6 + 1{,}6^2 + 100$$

$$R^2 - R^2 + 3{,}2R - 2{,}56 - 100 = 0$$

$$3{,}2R = 102{,}56$$

$$R = \frac{102{,}56}{3{,}2} = 32{,}05\ m$$

O volume do reservatório será:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$V = \frac{4 \times \pi \times 32{,}05^3}{3}$$

$$V \cong 137.903\ m^3$$

Como a cidade gasta $20.000\ m^3$ de água por hora, o volume de água no reservatório irá durar aproximadamente **7 horas**.

$$t = \frac{Volume\ Reservatório}{Consumo\ por\ Hora} = \frac{137.903\ m^3}{20.000\ m^3/h} \cong \boldsymbol{7\ horas}$$

Para que não falte água, o volume do reservatório deveria durar 12 horas (tempo sem água para abastecer). Nesse caso, o consumo deveria ser:

$$Novo\ Consumo = \frac{137.903\ m^3}{12\ h} \cong 11.492\ m^3/h$$

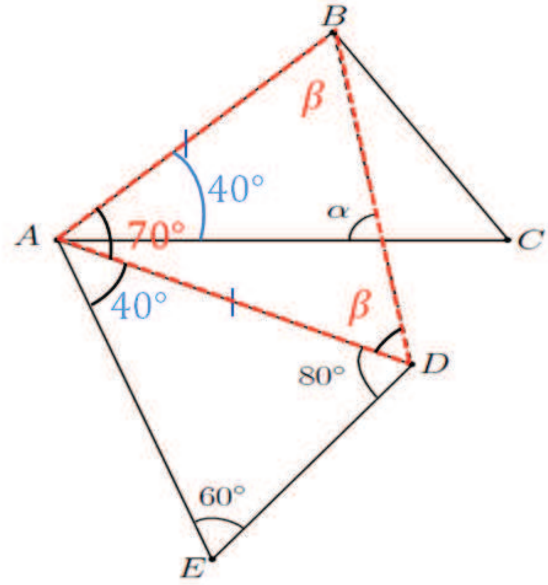
Para ter esse consumo, seria necessária uma economia de $8.508\ m^3/h$, que equivale a aproximadamente 43% do consumo atual de $20.000\ m^3/h$.

$$\frac{8.508}{20000} \cong 0{,}43 = 43\%$$

Questão 03

Resposta: **85**

Vamos analisar a figura abaixo:



Note que o triângulo ABC é o mesmo triângulo ADE. O triângulo só foi girado. Logo os valores dos ângulos no triângulo ABC valem: $\hat{B} = 80°$, $\hat{C} = 60°$ e $\hat{A} = 40°$ (descoberto usando a soma dos ângulos internos no triângulo ADE).

$$\hat{A} + 60° + 80° = 180°$$
$$\hat{A} = 180° - 60° - 80°$$
$$\hat{A} = 40°$$

O triângulo destacado em vermelho ABD é isósceles, pois $AB = AD$. Neste caso, e sabendo que a rotação foi de $70°$, podemos calcular primeiro o ângulo β marcado na figura usando a soma dos ângulos internos de um triângulo.

$$\beta + \beta + 70° = 180°$$
$$2\beta = 180° - 700°$$
$$2\beta = 110°$$
$$\beta = \frac{110°}{2}$$
$$\beta = 55°$$

Na sequência podemos usar o outro triângulo, que contém o ângulo α pedido na questão, e aplicar a soma dos ângulos internos novamente.

$$\alpha + \beta + 40° = 180°$$
$$\alpha + 55° + 40° = 180°$$
$$\alpha = 180° - 55° - 40°$$
$$\boldsymbol{\alpha = 85°}$$

Questão 04

Resposta: Alternativa (b)
Vamos calcular as taxas de crescimentos populacionais ao longo dos sete períodos. Indexando a taxa de crescimento do n-ésimo período por i_j. Ao longo dos sete períodos, teremos que:

$$
\begin{aligned}
i_1 &= \sqrt[10]{\frac{P(1950)}{P(1940)}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{152547}{129940}} - 1 = 0.0161 \Rightarrow i_1 = 0.0161 \\
i_2 &= \sqrt[10]{\frac{P(1960)}{P(1950)}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{219303}{152547}} - 1 = 0.0369 \Rightarrow i_2 = 0.0369 \\
i_3 &= \sqrt[10]{\frac{P(1970)}{P(1960)}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{375864}{219303}} - 1 = 0.0553 \Rightarrow i_3 = 0.0553 \\
i_4 &= \sqrt[10]{\frac{P(1980)}{P(1970)}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{664559}{375864}} - 1 = 0.0586 \Rightarrow i_4 = 0.0586 \\
i_5 &= \sqrt[11]{\frac{P(1991)}{P(1980)}} - 1 = \sqrt[11]{\frac{847595}{664559}} - 1 = 0.0223 \Rightarrow i_5 = 0.0223 \\
i_6 &= \sqrt[9]{\frac{P(2000)}{P(1991)}} - 1 = \sqrt[9]{\frac{969396}{847595}} - 1 = 0.0150 \Rightarrow i_6 = 0.0150 \\
i_7 &= \sqrt[10]{\frac{P(2010)}{P(2000)}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{1080113}{969396}} - 1 = 0.0108 \Rightarrow i_7 = 0.0108
\end{aligned}
$$

Cálculo das variações absolutas das taxas de crescimentos:

$$
\begin{aligned}
VA_1 &= i_2 - i_1 \Rightarrow VA_1 = 0.0369 - 0.0161 \Rightarrow VA_1 = 0.0208 \\
VA_2 &= i_3 - i_2 \Rightarrow VA_2 = 0.0553 - 0.0369 \Rightarrow VA_2 = 0.0184 \\
VA_3 &= i_4 - i_3 \Rightarrow VA_3 = 0.0586 - 0.0553 \Rightarrow VA_3 = 0.0033 \\
VA_4 &= i_5 - i_4 \Rightarrow VA_3 = 0.0223 - 0.0586 \Rightarrow VA_4 = -0.0363 \\
VA_5 &= i_6 - i_5 \Rightarrow VA_3 = 0.0150 - 0.0223 \Rightarrow VA_5 = -0.0073 \\
VA_6 &= i_7 - i_6 \Rightarrow VA_3 = 0.0108 - 0.0150 \Rightarrow VA_6 = -0.0042
\end{aligned}
$$

Cálculos das variações relativas das taxas de crescimento:

$$\begin{aligned}
VR_1 &= \frac{VA_1}{i_1} = \frac{0.0208}{0.0161} = 1.2919 VR_1 = 1.2919 \\
VR_2 &= \frac{VA_2}{i_2} = \frac{0.0184}{0.0369} = 0.4986 VR_2 = 0.4986 \\
VR_3 &= \frac{VA_3}{i_3} = \frac{0.0033}{0.0553} = 0.0596 VR_3 = 0.0596 \\
VR_4 &= \frac{VA_4}{i_4} = \frac{-0.0363}{0.0586} = 0.6194 VR_4 = -0.6194 \\
VR_5 &= \frac{VA_5}{i_5} = \frac{-0.0073}{0.0223} = 0.3273 VR_5 = -0.3273 \\
VR_6 &= \frac{VA_6}{i_6} = \frac{-0.0042}{0.0150} = -0.2800 VR_5 = -0.2800
\end{aligned}$$

A variação relativa média é dada por:

$$\begin{aligned}
VR_{\text{média}} &= \frac{\sum_{i=1}^{6} V_i}{6} \\
&= \frac{1.2919 + 0.4986 + 0.0596 + (-0.6194) + (-0.3273) + -0.2800}{6} \\
&= 0.1033 \Rightarrow VR_{\text{média}} = 10.33\%
\end{aligned}$$

Questão 05

Resposta: **255**

Vamos chamar nesse problema a quantidade de q e o preço de p. Pela informação do problema temos que:

Quantidade (q)	Preço (p)
4.000	5
3.600	6

Temos que o preço e quantidade são grandezas proporcionais, ou seja, seguem uma relação linear. Dessa forma podemos escrever uma função de primeiro grau que calcula a quantidade vendida em função do preço.

$$q = Ap + B$$

Vamos determinar o coeficiente angular (A) e o coeficiente linear (B) com os dados da tabela. Montando um sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} 4000 = 5A + B \\ 3600 = 6A + B \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

- Isola B na primeira equação: $B = 4000 - 5A$
- Substitui B na segunda equação:

$$3600 = 6A + (4000 - 5A)$$

$$3600 = 6A + 4000 - 5A$$

$$3600 - 4000 = A$$

$$A = -400$$

- Substitui o valor encontrado para A na equação isolada para B, no primeiro passo.

$$B = 4000 - 5 \times (-400)$$

$$B = 4000 + 2000$$

$$B = 6000$$

A função que descreve a relação entre a quantidade e o preço será:

$$\boldsymbol{q = -400p + 6000}$$

Agora, precisamos escrever o lucro do fabricante. Sabemos que o lucro é a diferença entre a receita (quantidade de dinheiro que entra) e o custo (dinheiro gasto) para fabricar os DVDs.

$$Lucro = Receita - Custo$$

A receita (R) será a quantidade vendida multiplicada pelo preço de uma unidade.

$$R = q \times p$$
$$R = (-400p + 6000) \times p$$
$$R = -400p^2 + 6000p$$

O custo (C) será o custo de produzir uma unidade (R$ 2,00) multiplicado pela quantidade.

$$C = 2 \times q$$
$$C = 2 \times (-400p + 6000)$$
$$C = -800p + 12000$$

Substituindo a receita e o custo no lucro (L), temos:

$$L = (-400p^2 + 6000p) - (-800p + 12000)$$
$$L = -400p^2 + 6000p + 800p - 12000$$
$$L = -400p^2 + 6800p - 12000$$

Se o lucro é nulo, significa que $L = 0$. Resolvendo a equação acima com $L = 0$, temos:

$$-400p^2 + 6800p - 12000 = 0$$

Podemos dividir todos os termos por -400.

$$p^2 - 17p + 30 = 0$$

$$p = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \times 1 \times 30}}{2 \times (1)}$$
$$p = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 120}}{2}$$
$$p = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{2}$$
$$p = \frac{17 \pm 13}{2}$$

Logo, os valores p_1 e p_2 são:

- $p_1 = \frac{17+13}{2} = \frac{30}{2} = 15$
- $p_2 = \frac{17-13}{2} = \frac{4}{2} = 2$

O preço que faz o lucro ser máximo corresponde ao valor de preço que será o vértice da parábola. Calculando o preço do vértice (p_0):

- $p_0 = \frac{-(6800)}{2\times(-400)} = \frac{-6800}{-800} = 8{,}5$

Calculando o valor de R, pedido no problema:

$$R = p_0 \times p_1 \times p_2$$

$$R = 8{,}5 \times 15 \times 2$$

$$\boldsymbol{R = 255}$$

Questão 06

Resposta:

Como consideramos N esferas de raio igual a 5 centímetros e alojamos tais esferas em uma caixa de altura $h = 10$, isto implica que teremos essencialmente uma camada de esferas na caixa.

Como cada caixa C_1 comporta no máximo 6 esferas e se usarmos x caixas C_1 ficam sobrando 2 esferas, ento:

$$N = x6 + 2$$

Como cada caixa C_2 comporta no máximo 7 esferas e se usarmos y caixas C_2 ficam sobrando 3 esferas, ento:

$$N = y7 + 3$$

Para $y = 5$, temos que $N = 5 \cdot 7 + 3 \Rightarrow N = 38.$ Voltando na primeira equção, temos que:

$$38 = x6 + 2 \Rightarrow x = 6$$

Para obtermos os próximos números que satisfazem o sistema de equações $\left\{ \begin{array}{lcl} N & = & x6 + 2 \\ N & = & y7 + 3 \end{array} \right.$, nós devemos somar os múltiplos de 42 $(\text{mmc}(6, 7))$. Desta forma, o maior número, menor do que 300 que satisfaz tal propriedade é igual a:

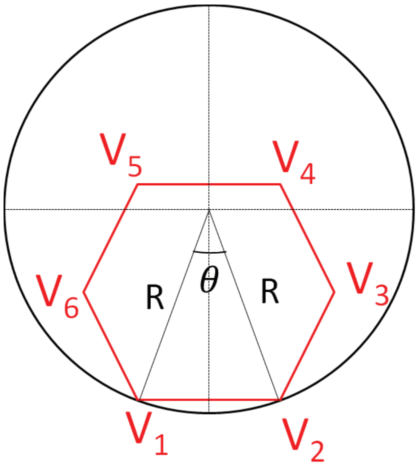
$$N = 38 + 6 \cdot 42 = 252 + 38 = 290$$

Então $N = 290$.

Questão 07

Resposta: **8**

A figura abaixo ilustra o problema da questão. O primeiro passo é encontrar o comprimento do arco de circunferência que corresponde a distância entre dois vértices do hexágono. Ou seja, o lado L do hexágono irá tocar a circunferência em dois pontos, cujo comprimento de arco é $C_L = R\theta$ (veja a figura). Veja que o valor C_L é o arco formado entre o vértice V_1 e V_2 (todos os arcos serão iguais, pois os lados do hexágono são iguais).



O percurso total de uma volta completa do hexágono irá gerar um arco C dado por:

$$C = 6 \times (R\theta)$$

Sabemos que $C + \frac{\pi}{4}R = 2\pi R$ (uma circunferência completa).

$$6R\theta + \frac{\pi}{4}R = 2\pi R$$

$$R\left(6\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi R$$

$$6\theta + \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

$$\theta = \frac{7\pi}{24}$$

Para que o vértice 1 volte a tocar o mesmo ponto inicial, serão necessários N rotações dos lados do hexágono. Nesse caso, precisamos ter um múltiplo natural M de circunferência completa.

$$N \times (6R\theta) = M \times (2\pi R)$$

$$N \times 6\theta = M \times 2\pi$$

$$N \times 6 \times \frac{7\pi}{24} = M \times 2\pi$$

$$N \times \frac{7}{4} = M \times 2$$

$$7N = 8M$$

Como N e M são números naturais, os menores valores que satisfazem a condição são:

- $\boldsymbol{N = 8}$
- $M = 7$

Ou seja, o hexágono precisará completar 8 rotações em torno do seu centro.

Questão 08

Resposta: **3**

A matriz A representa quais são os destinatários diretos de cada remetente (após 1 passo). A linha indica o remetente e a coluna o destinatário.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz A^2 representa quais são os destinatários indiretos de cada remetente após 2 passos.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por exemplo, note a linha 1 (remetente Maria). A Maria no primeiro passo envia apenas para Simone (matriz A, elemento a_{14}). Após o segundo passo, vimos que Simone (que recebeu de Maria no primeiro passo) envia para Valéria e José. Então, após dois passos, Maria enviou indiretamente a mensagem para Valéria (matriz A^2, elemento a_{13}) e para José (matriz A^2, elemento a_{13}). O mesmo raciocínio vale para as demais linhas.

A matriz A^3 representa quais são os destinatários indiretos de cada remetente após 3 passos.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Novamente vamos analisar a linha 1 (remetente Maria). A Maria no primeiro passo envia apenas para Simone (matriz A, elemento a_{14}). Após o segundo passo, vimos que Simone (que recebeu de Maria no primeiro passo) envia para Valéria e José. Então, após dois passos, Maria enviou indiretamente a mensagem para Valéria (matriz A^2, elemento a_{13}) e para José (matriz A^2, elemento a_{13}). Após o terceiro passo, Valéria (que recebeu de Simone vindo de Maria) envia para José e Rodrigo; e também após o terceiro passo, José (que recebeu de Simone vindo de Maria) envia para Rodrigo. Então após o terceiro passo teremos que Maria enviou indiretamente duas vezes para Rodrigo (matriz A^3, elemento a_{12}) e uma vez José (matriz A^3, elemento a_{15}). O mesmo raciocínio vale para as demais linhas.

Para saber o total de destinatários após cada passo, precisamos somar as matrizes.

- Após 1 passo: A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Após 2 passos: $A + A^2$

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Após 3 passos: $A + A^2 + A^3$

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Analisando os itens:

I) Falso. Note que $A^T \neq A$.

II) Verdadeiro. Ver matriz A^2.

III) Verdadeiro. Veja a linha 2 da matriz $A + A^2$ que representa todos os destinatários do Rodrigo. Todos os elementos, fora o elemento da coluna 2 (que é o próprio Rodrigo) tem valor diferente de zero, indicando ter recebido a mensagem.

IV) Falso. Rodrigo recebeu a mensagem 2 vezes. Veja que o elemento a_{12} na matriz $A + A^2 + A^3$ é igual a 2.

V) Verdadeiro. Todos os elementos fora da diagonal principal são diferente de zero, indicando que todos já receberam a mensagem, independentemente do destinatário.

Temos que: $N_V = 3$ e $N_F = 2$. Logo,

$$\boldsymbol{N_V \times N_F - N_V}$$

$$\boldsymbol{3 \times 2 - 3}$$

$$\boldsymbol{6 - 3}$$

$$\boldsymbol{3}$$

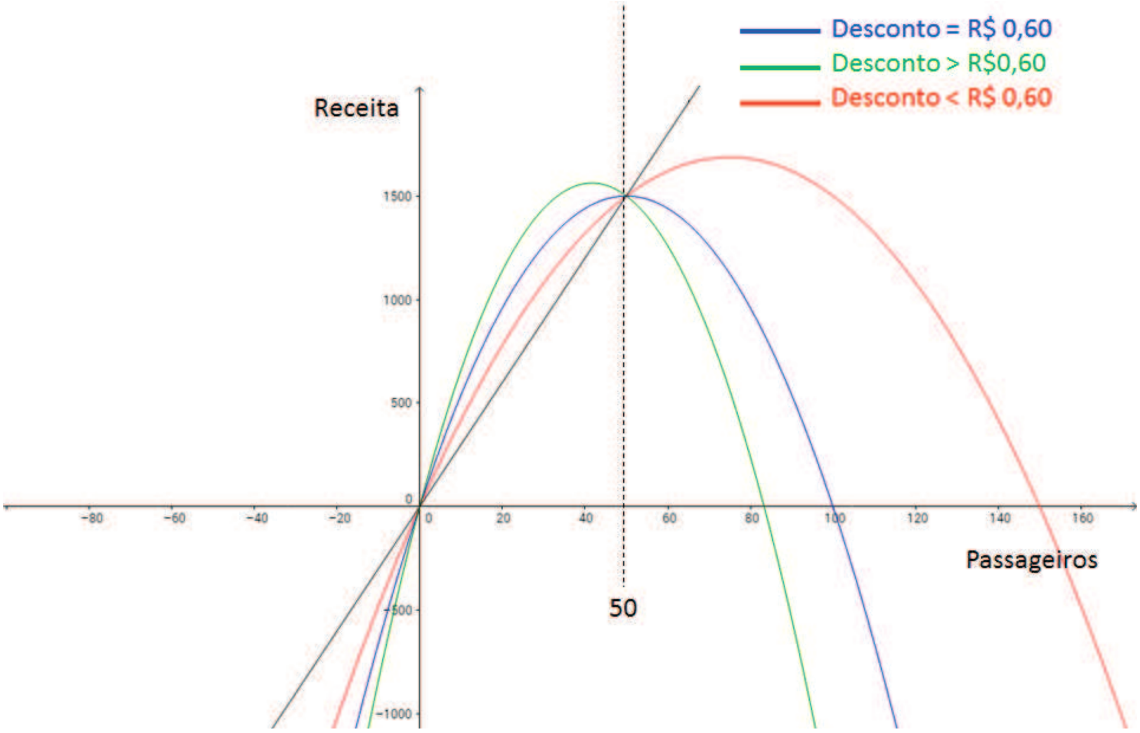
Questão 09

Letra: **A**

Vamos escrever a receita R da empresa em função da quantidade de passageiros x.

$$R(x) = \begin{cases} 30x, se\ x \leq 50 \\ [30 - p(x-50)]x, se\ s > 50 \end{cases}$$

Abaixo apresentamos uma simulação das funções no gráfico e os comentários de cada item.



Analisando os itens:

I) Falso.

Analisando a inequação abaixo vamos perceber que a condição de oferecer desconto seria viável para valores de passageiros abaixo de 50, que é a região do domínio onde o desconto não é concedido.

$$[30 - p(x-50)]x > 30x$$

$$30x - px^2 + 50px > 30x$$

$$px(50-x) > 0$$

$$x < 50$$

II) Verdadeiro. Se fizermos o gráfico da reta $30x$ (receita sem desconto), a reta é sempre superior a parábola da receita com desconto ($[30 - p(x - 50)]x$) para os valores de x acima de 50 (como mostrado no item I), independentemente do valor de p.

III) Falso. Veja o gráfico abaixo, onde percebemos que o vértice da parábola que representa a receita com desconto pode se deslocar, ou seja, tem valores diferentes. Note que se fosse cobrado a passagem sem desconto a receita seria maior do que o máximo da receita com desconto.

IV) Verdadeiro.

$$R(x) = [30 - p(x - 50)]x$$

$$R(x) = [30 - 0{,}5(x - 50)]x$$

$$R(x) = [30 - 0{,}5x + 25]x$$

$$R(x) = [55 - 0{,}5x]x$$

$$R(x) = -0{,}5x^2 + 55x$$

Calculando o valor do x do vértice:

$$x_V = \frac{-55}{2 \times (-0{,}5)}$$

$$x_V = \frac{-55}{-1}$$

$$x_V = 55$$

Temos que: $N_V = 2$ e $N_F = 2$. Logo,

$$\boldsymbol{N_V - N_F}$$

$$\boldsymbol{2 - 2}$$

$$\boldsymbol{0}$$

Questão 10

Resposta:

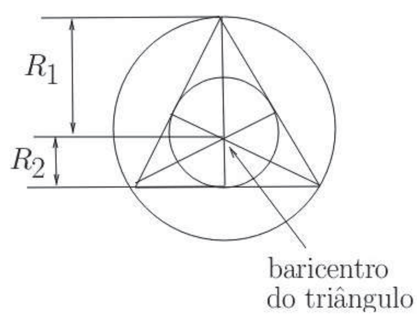
Temos que a altura da pilha de discos pode ser calculada por:

$$H = \sum_{i=1}^{N} h_i$$

Como a altura e o raio de cada disco se relacionam sob a forma $h_i = \dfrac{R_i}{4}$, então

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{N} h_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{R_i}{4} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N} R_i \qquad (I) \end{aligned}$$

Vejamos como se comporta o raio de cada disco neste processo. Considere a figura abaixo até a segunda iterao do procedimento.



Como o baricentro divide a mediana na razão $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$, então temos que:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{3}(R_1 + R_2) \\ \Rightarrow R_2 &= \frac{R_1}{3} + \frac{R_2}{3} \\ \Rightarrow R_2 &= \frac{R_1}{2} \Rightarrow R_{i+1} = \frac{R_i}{2} \end{aligned}$$

Ou seja, o raio subsequente é sempre igual à metade do raio atual. Desta forma, teremos, por I que:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N} R_i \\
&= \frac{1}{4}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + +R_N) \\
&= \frac{1}{4}\left(16 + \underbrace{8}_{\frac{R_1}{2}} + \underbrace{4}_{\frac{R_2}{2}} + \underbrace{2}_{\frac{R_3}{2}} + \underbrace{1}_{\frac{R_4}{2}} + \frac{1}{2} + \ldots 16\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\right)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} 16\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{16(1-(\frac{1}{2})^N)}{1-\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{(use fórmula de soma de PG } \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\text{)} \\
H &= 8\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^N\right) \qquad (II)
\end{aligned}$$

O problema fornece a seguinte restrição sobre a altura H da pilha:

$$7,9 < H < 7,95 \qquad (III)$$

Voltando (II) em (III), temos que:

$$\begin{aligned}
7,9 < H &< 7,95 \\
7,9 < 8\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^N\right) &< 7,95
\end{aligned}$$

Trabalhando com a primeira desigualdade, nós teremos que:

$$\begin{aligned}
7,9 &< 8\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^N\right) \\
\frac{7,9}{8} &< 1-\left(\frac{1}{2}\right)^N \\
\left(\frac{1}{2}\right)^N &< 1-\frac{7,9}{8} \\
\text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right)^N &< \text{Ln}\left(1-\frac{7,9}{8}\right) \\
N\cdot\text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) &< \text{Ln}\left(1-\frac{7,9}{8}\right) \qquad \times(\text{Ln}(\frac{1}{2})^{-1}) \;\; \text{(inverte a desigu., pois Ln}(\frac{1}{2})\text{ é negativo)} \\
N &> \frac{\text{Ln}\left(1-\frac{7,9}{8}\right)}{\text{Ln}(\frac{1}{2})} \Rightarrow N > 6,32
\end{aligned}$$

Trabalhando com a segunda desigualdade, nós teremos que:

$$\begin{aligned} H &< 7,95 \\ 8\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^N\right) &< 7,95 \end{aligned}$$

Desenvolvendo de forma similar a que fizesmos com a primeira desigualdade, nós chegaremos no resultado:

$$N < 7,32$$

Como $N > 6,32$ e $N < 7,32$, isto implica que o nmero de discos, que satisfaz a restrição $7,9 < H < 7,95$, deve ser igual a $N = 7$ discos. Analisando a área visível preta A_p:

$$\begin{aligned} A_p &= (A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + (A_5 - A_6) + A_7 \\ &= (A_1 + A_3 + A_5 + A_7) - (A_2 + A_4 + A_6) \quad \text{(reorganizamos a soma)} \\ &= \left(\pi 16^2 + \pi\left(\frac{16}{2^2}\right)^2 + \pi\left(\frac{16}{2^4}\right)^2 + \pi\left(\frac{16}{2^6}\right)^2\right) - \left(\pi\left(\frac{16}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{16}{2^3}\right)^2 + \pi\left(\frac{16}{2^5}\right)^2\right) \\ &= \pi 16^2\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right) - \pi 16^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \\ &= \pi 16^2 \frac{1(1-(\frac{1}{16})^4)}{1-\frac{1}{16}} - \pi 16^2 \frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{16})^3)}{1-\frac{1}{16}} \\ A_p &= 643,43 \end{aligned}$$

Analisando a área visível preta A_v:

$$\begin{aligned} A_v &= (A_2 - A_3) + (A_4 - A_5) + (A_6 - A_7) \\ &= (A_2 + A_4 + A_6) - (A_3 + A_5 + A_7) \\ &= \left(\pi\left(\frac{16}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{16}{2^3}\right)^2 + \pi\left(\frac{16}{2^5}\right)^2\right) - \left(\pi\left(\frac{16}{2^2}\right)^2 + \pi\left(\frac{16}{2^4}\right)^2 + \pi\left(\frac{16}{2^6}\right)^2\right) \\ &= \vdots \\ &= \pi 16^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) - \pi 16^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right) \\ &= \pi 16^2 \frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{16})^3)}{1-\frac{1}{16}} - \pi 16^2 \frac{\frac{1}{16}(1-(\frac{1}{16})^3)}{1-\frac{1}{16}} \\ &= 160,81 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{A_p}{A_v} &= \frac{643,43}{160,81} \\ \frac{A_p}{A_v} &\approx 4 \end{aligned}$$