Questão 1

Resposta: 7636

Solução:

Seja n o número representado pelo numeral $n = ab$. Então o *espelho* do número n é representado pelo numeral $n_{espelho} = ba$.

Temos que:

$$\begin{aligned} n + n_{espelho} &= \underbrace{ab} \quad + \quad \underbrace{ba} \\ &= (b + 10a) + (a + 10b) \quad \text{(pela representação em base } 10) \\ &= 11a + 11b \\ n + n_{espelho} &= 11 \cdot (a + b) \end{aligned}$$

Como $n + n_{espelho}$ deve ser um quadrado perfeito, então $a + b$ deve ser igual a 11. Como $1 \leq a \leq 9$ e $0 \leq a \leq 9$, então para que se cumpra a condição $a + b = 11$, temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{array}{rr} & \underbrace{a+b} \\ & 2+9 \\ \text{ou} & 3+8 \\ \text{ou} & 4+7 \\ \text{ou} & 5+6 \\ \text{ou} & 6+5 \\ \text{ou} & 7+4 \\ \text{ou} & 7+4 \\ \text{ou} & 8+3 \\ \text{ou} & 9+2 \end{array}$$

Neste sentido, os maiores números de dois algarismos que cumprem com a propriedade

"*A soma do número **n** com o seu espelho é um quadrado perfeito*" são:

$$83 \quad \text{e} \quad 92$$

Logo,

$$83 \cdot 92 = 7636$$

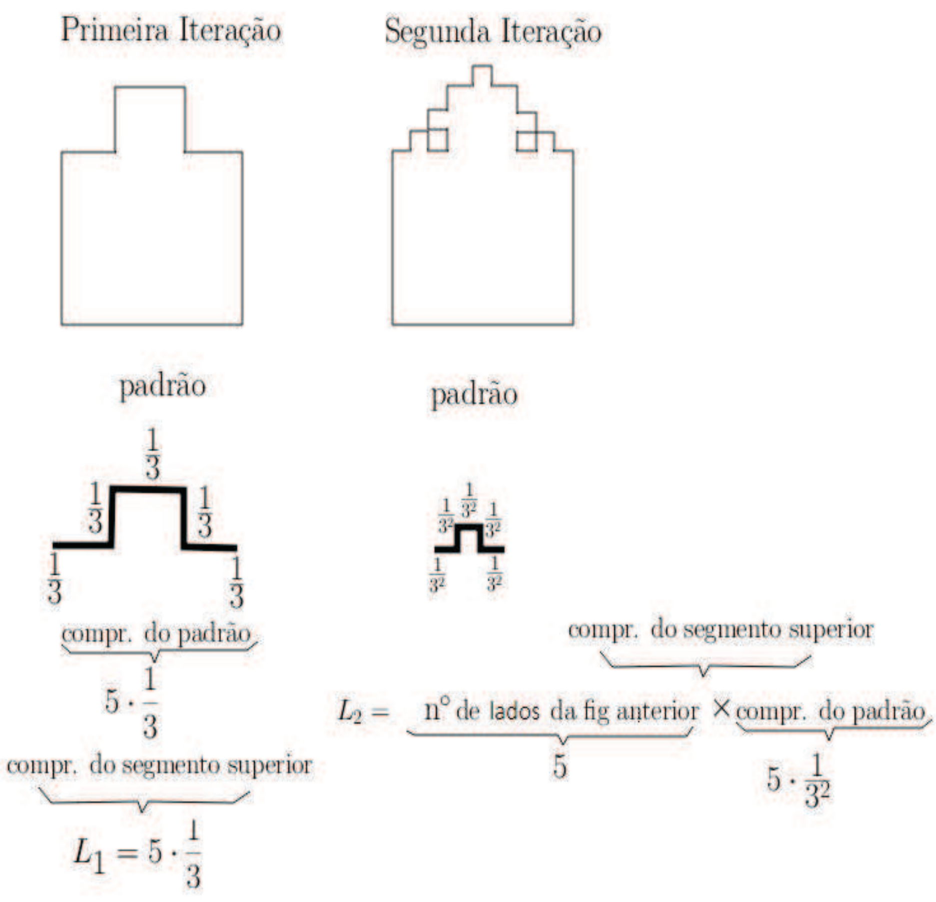
Questão 2

Resposta: 9

Solução:

A cada iteração do processo, em cada “*lado*” da figura anterior, brota um quadrado, cujo lado é o comprimento do “*lado*” da figura anterior dividido por 3.

Abaixo ilustramos as duas primeiras iterações do processo:



Neste sentido, o comprimento do segmento superior irá satisfazer a relação:

$$\text{número de lados da figura anterior} \times \text{comprimento do padrão}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
L_2 &= 5 \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{3^2}\right) && \Rightarrow L_2 = \frac{5^2}{3^2} \\
L_3 &= (5 \cdot 5) \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{3^3}\right) && \Rightarrow L_3 = \frac{5^3}{3^3} \\
\vdots & \quad \vdots && \\
& && \Rightarrow L_n = \frac{5^n}{3^n}
\end{aligned}$$

Neste sentido, teremos que o perímetro da *figura catedral* na n-ésima iteração será dado por:

$$\begin{aligned}
P_n &= 3 + \underbrace{L_n} \\
P_n &= 3 + \frac{5^n}{3^n}
\end{aligned}$$

Queremos que o perímetro da figura catedral seja pelo menos igual a 93. Então, devemos ter que:

$$\begin{aligned}
P_n &\geq 93 \\
3 + \frac{5^n}{3^n} &\geq 93 \\
\Rightarrow \underbrace{\frac{5^n}{3^n}} &\geq 93 - 3 \\
\Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^n &\geq 90
\end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da desigualdade, temos que:

$$\begin{aligned}
\text{Ln}\left(\frac{5}{3}\right)^n &\geq \text{Ln}(90) \\
n \cdot \text{Ln}\left(\frac{5}{3}\right) &\geq \text{Ln}(90) \\
n &\geq \frac{\text{Ln}(90)}{\text{Ln}\left(\frac{5}{3}\right)} \\
n &\geq 8.8088 \underbrace{\Rightarrow}_{n\in\mathbb{N}} n \geq 9
\end{aligned}$$

Neste sentido, são necessárias 9 iterações do processo para que o perímetro da figura catedral seja pelo menos igual a 93.

Questão 03

Letra: **B**

Vamos analisar cada item, classificando-o como Verdadeiro ou Falso.

Item I: **VERDADEIRO.**

- Note que a função g(x) é uma função exponencial de base 3. Para qualquer x, a função terá valor maior que zero.

Item II: **FALSO.**

- Note que: $g(0) = 3^0 = 1$.
- Logo, $f\big(g(0)\big) = f(1) = 1^2 + 1 - 6 = 1 + 1 - 6 = -4$.

Item III: **FALSO.**

- O vértice da parábola de uma função genérica de segundo grau do tipo: $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dado por: $x_v = -\frac{b}{a}$. Para a função $f(x)$ dada, temos que $x_v = -\frac{1}{2\times 1} = -\frac{1}{2}$.
- Aplicando a função $g(x)$ no valor x_v, temos: $g(x_v) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Note que o denominador não é um número inteiro, logo, $g(x_v)$ não é um número racional.

Item IV: **FALSO.**

- Se $g(x) = 1$, então:

$$3^x = 1$$

$$3^x = 3^0$$

$$x = 0$$

- Logo, $f(x) = f(0) = 0^2 + 0 - 6 = -6$.

Neste problema, temos então: $N_V = 1$ e $N_F = 3$. Logo, $N_V - N_F = 1 - 3 = -2$.

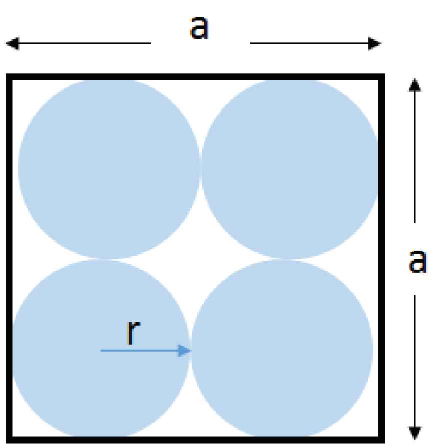
Questão 04

Resposta: **20**

O cubo tem lado a, logo seu volume é $V = a^3$.

Note que, se cabem oito esferas no cubo, significa que o raio de cada esfera será $r = \frac{a}{4}$.

Veja a vista de uma face do cubo.



O volume de cada esfera (V_e) será: $V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times \left(\frac{a}{4}\right)^3 = \frac{a^3}{16}$. Note que já foi usado a aproximação do valor de π para 3.

Logo, o volume de água (V_a) é dado por: $V_a = V - 8V_e = a^3 - 8\left(\frac{a^3}{16}\right) = a^3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a^3$.

Se foram usados 4 litros, temos que $4l = 4 \times 10^{-3}\ m^3$.

Então,

$$V_a = 4 \times 10^{-3}$$

$$\frac{1}{2}a^3 = 4 \times 10^{-3}$$

$$a^3 = 8 \times 10^{-3}$$

$$a = 2 \times 10^{-1} m = 0{,}2\ m = 20\ cm$$

Questão 05

Letra: **B**

Vamos analisar cada uma das alternativas:

A) INCORRETA.

Note que, se $\cos^2\theta = 0{,}75$, então, $\cos\theta = \pm\sqrt{0{,}75} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Neste caso, sem nenhuma outra restrição, o ângulo θ pode pertencer a qualquer um dos quadrantes do círculo trigonométrico.

B) CORRETA.

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos(2\theta) = 2 \times 0{,}75 - 1$$

$$\cos(2\theta) = 1{,}5 - 1$$

$$\cos(2\theta) = 0{,}5$$

C) INCORRETA.

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - 0{,}75$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = 0{,}25$$

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{0{,}25}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \pm 0{,}5$$

Ou seja, caso θ pertença ao 3º ou 4º quadrante, o valor do seno será $-0{,}5$.

D) INCORRETA.

$$\sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{1}{0{,}75} = \frac{4}{3}$$

E) INCORRETA

$\cos^2\theta = \cos^2 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0{,}75.$

$\cos^2\theta = \cos^2 120° = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

Note que θ pode ser 30º mas não pode ser 120º.

Questão 06

Resposta: **75**

Sejam a, b, c, d, e e f os seis números inteiros. Temos que

$$\frac{a + b + c + d + e + f}{6} = 15$$

Logo:

$$a + b + c + d + e + f = 90$$

Um desses números, digamos o número a, seja o maior possível. Ele será o maior, se, e somente se, a soma dos demais for a menor soma possível.

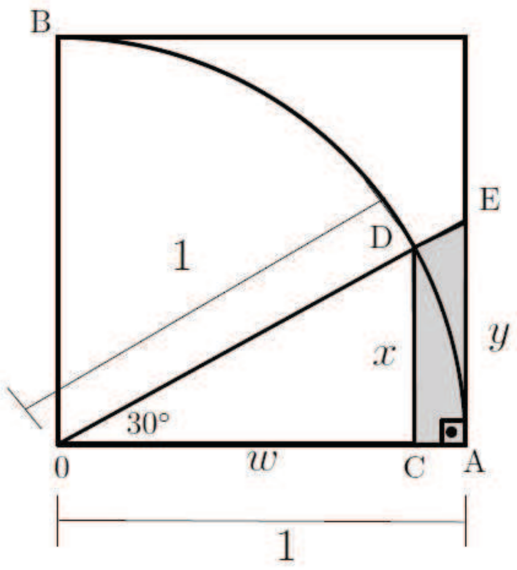
Isto ocorre para

$$b + c + d + e + f = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Portanto, $a = 90 - 15 = 75$.

Questão 07

Letra: **C**



Usando relações trigonométrica nos triângulos retângulos OCD e OAE, temos que:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{x}{1} \rightarrow x = 1/2$$

$$\cos 30° = \frac{w}{1} \rightarrow w = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{y}{1} \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim, teremos que a área A será:

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$

$$A = \frac{\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{6}\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$

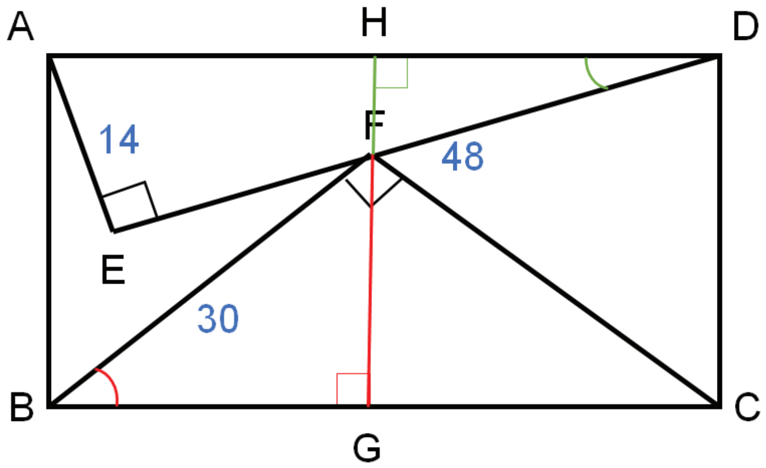
$$A = \frac{\left(\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}}{12}\right)}{2}$$

$$A = \frac{(4\sqrt{3}-6+6-3\sqrt{3})}{24} = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

Questão 08

Resposta: **103**

Vamos considerar a figura abaixo, onde a linha vermelha (FG) e verde (FH) foram adicionadas para guiar a resolução.



Primeiro vamos calcular AD (que é igual BC):

$$AD^2 = AE^2 + ED^2$$

$$AD^2 = 14^2 + 48^2$$

$$AD^2 = 196 + 2304$$

$$AD^2 = 2500$$

$$AD = 50$$

(Desprezamos a raiz negativa pois trata de medida de comprimento.)

Calculando CF:

$$BC^2 = BF^2 + CF^2$$

$$50^2 = 30^2 + CF^2$$

$$2500 = 900 + CF^2$$

$$CF^2 = 2500 - 900$$

$$CF^2 = 1600$$

$$CF = 40$$

(Desprezamos a raiz negativa pois trata de medida de comprimento.)

Utilizando a semelhança de triângulos.

- Note que o triângulo BFC é semelhante ao triângulo BGF.

$$\frac{BF}{FG} = \frac{BC}{CF}$$

$$\frac{30}{FG} = \frac{50}{40}$$

$$FG = 24$$

$$\frac{BF}{BG} = \frac{BC}{BF}$$

$$\frac{30}{BG} = \frac{50}{30}$$

$$BG = 18$$

$$BG + GC = BC$$

$$18 + GC = 50$$

$$GC = 32$$

Note que $HD = CG$.

- Note que o triângulo AED é semelhante ao triângulo FHD.

$$\frac{AE}{ED} = \frac{FH}{HD}$$

$$\frac{14}{48} = \frac{FH}{32}$$

$$FH = \frac{28}{3}$$

Logo,

$$AB = GH = FG + FH$$

$$AB = 24 + \frac{28}{3} = \frac{100}{3}$$

AB pode ser escrito como a fração irredutível $\frac{100}{3}$. A soma do numerador com o denominador será: $100 + 3 = 103$.

Questão 09

Letra: **D**

Primeiramente vamos construir a matriz de probabilidade de transição P. Note que o elemento p_{ij} representa a probabilidade do rato passar do compartimento j para o compartimento i. Por exemplo, o elemento p_{12} representa a probabilidade do rato passar do compartimento 2 para o compartimento 1, que no caso do desenho é $\frac{1}{3}$. Note que a diagonal é zero, visto que o rato muda obrigatoriamente de compartimento, sendo impossível ficar no mesmo compartimento.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Analisando os itens:

I. FALSO.

A soma dos elementos da primeira linha é $\frac{2}{3}$.

II. VERDADEIRA.

Neste caso precisamos calcular a matriz P^2 e observar o elemento p_{21} desta nova matriz. Note que este elemento vale $\frac{1}{3}$.

$$P^2 = P \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{11}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{11}{18} \end{pmatrix}$$

III. FALSO.

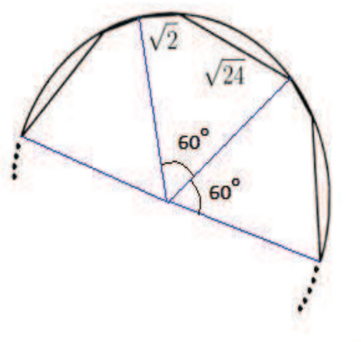
Observando a matriz P^2 acima, o elemento p_{22} vale $\frac{11}{18}$ que é diferente de 50%.

Questão 10

Resposta: 38

Solução:

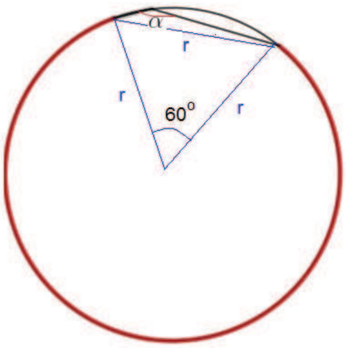
Considere a situação ilustrada na figura:



Temos que o ângulo central da circunferência da figura é dado por

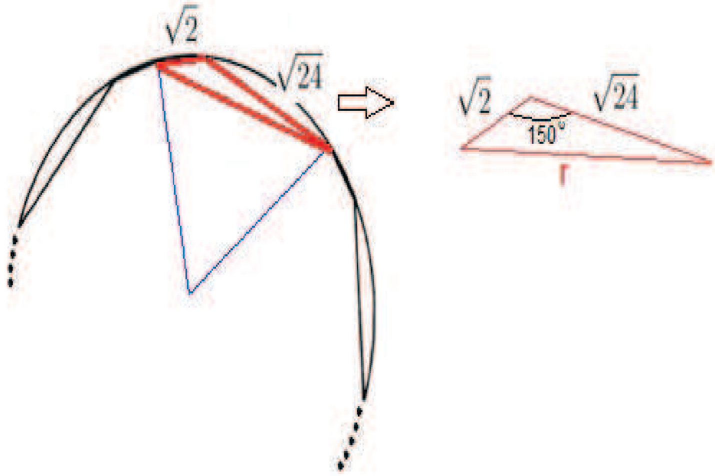
$$\begin{aligned} \theta_{\text{central}} &= \frac{360}{6} \\ \theta_{\text{central}} &= 60^\circ \end{aligned}$$

Temos que o ângulo central $\theta_{\text{central}} = 60^\circ$ determinará um arco de 60° Neste sentido o arco restante, destacado em vermelho na figura abaixo, será de $360 - 60 = 300^\circ$.



Logo o ângulo α, inscrito na circunferência, por propriedade de arcos deve ser a metade do arco de $300°$, ou seja, $\alpha = 150°$.

Neste sentido, conforme exibe a figura abaixo, é possível extrair um triângulo de referência, destacado em vermelho:



Aplicando a *lei dos cossenos* no triângulo vermelho, temos que:

$$
\begin{aligned}
r^2 &= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{24})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{24} \cdot \cos(150^\circ) \\
r^2 &= 2 + 24 - 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 24}\,\underbrace{\cos(150^\circ)} \\
r^2 &= 2 + 24 - 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 24}\frac{(-\sqrt{3})}{2} \\
&= 26 + 12 \\
&= 38
\end{aligned}
$$

$$r^2 = 38$$