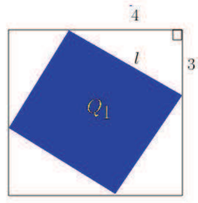
Questão 1

Letra: E

Solução:

Determinando a área do quadrado Q_1, referente à decoração de Eduard, exibido em azul na figura abaixo.



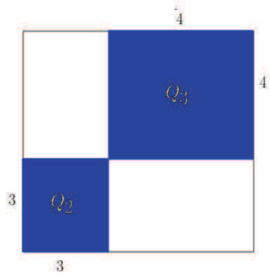
Aplicando o *Teorema de Pitágoras* ao triângulo retângulo do canto superior direito da figura, temos que:

$$\begin{aligned} l^2 &= 3^2 + 4^2 \\ l^2 &= 9 + 16 \\ l^2 &= 25 \\ l &= \sqrt{25} \Rightarrow l = 5 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} A_{Q_1} &= l^2 \\ &= 5^2 \\ A_{Q1} &= 25 \end{aligned}$$

Com respeito decoração de José, vamos calcular as áreas dos quadrados Q_2 e Q_3, exibidos na figura abaixo.



$$\begin{aligned} A_{Q_3} &= 4^2 \\ A_{Q_3} &= 16 \end{aligned}$$

Temos também que:

$$\begin{aligned} A_{Q_2} &= 3^2 \\ A_{Q_2} &= 9 \end{aligned}$$

Em relação à decoração proposta por José, temos que a área total será dada por:

$$A_T = A_{Q_2} + A_{Q_3} = 9 + 16 = 25$$

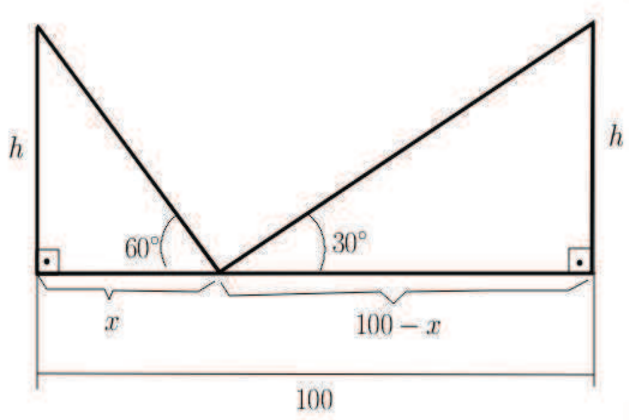
Logo a área da decoração proposta por Eduard tem o mesmo valor da área da decoração proposta por José. Neste sentido, as duas decorações gastarão a mesma quantidade de tinta.

Questão 2

Letra: B.

Solução:

A situação do problema está representada pela figura abaixo:



Promovendo uma trigonometria em ambos os triângulos retângulos de referência que aparecem no desenho da figura, temos que:

$$\begin{cases} \text{tg}(60°) = \dfrac{h}{x} & (I) \\ \text{tg}(30°) = \dfrac{h}{100 - x} & (II) \end{cases}$$

Segue de (I) que $h = \sqrt{3}x$. Substituindo $h = \sqrt{3}x$ em (II), nós temos que:

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{tg}(30°)} &= \frac{\sqrt{3}x}{100 - x} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{\sqrt{3}x}{100 - x} \\ \Rightarrow \frac{1}{3} &= \frac{x}{100 - x} \\ (100 - x) \cdot \frac{1}{3} &= x \\ \frac{100}{3} - \frac{x}{3} &= x \end{aligned}$$

Isolando a variável x, temos que:

$$\begin{aligned} -x - \frac{x}{3} &= -\frac{100}{3} \\ -\frac{4x}{3} &= -\frac{100}{3} \qquad \times(-3) \\ 4x &= 100 \Rightarrow x = \frac{100}{4} \Rightarrow x = 25 \end{aligned}$$

Voltando $x = 25$ em I, temos que:

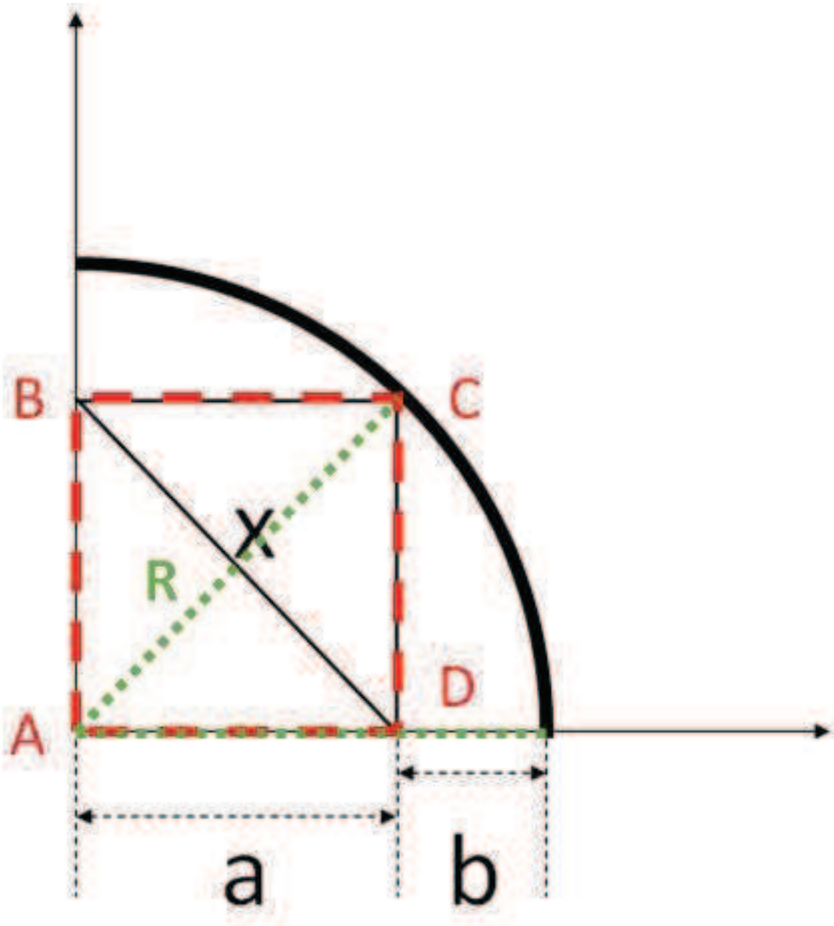
$$h = \sqrt{3} \cdot 25 \Rightarrow h = 25\sqrt{3}$$

Questão 03

Resposta: **13**

Perceba na figura que X é a diagonal do retângulo $ABCD$ marcado em vermelho (pontilhado). A outra diagonal do retângulo é o raio (R) do quarto de circunferência (tracejado em verde), que pela figura percebemos que vale $a + b$. Como as duas diagonais do retângulo são iguais, podemos dizer que:

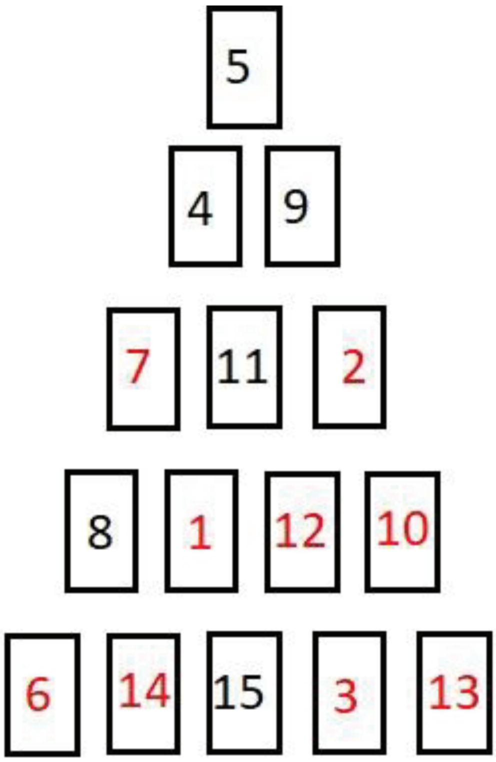
$$\boldsymbol{x = R = a + b = 10 + 3 = 13.}$$



Questão 04

Resposta: **51**

Analisando a condição para colocar as demais cartas, percebemos que o preenchimento do triângulo da diferença será o seguinte:



Logo, as cartas da última fileira serão: 6, 14, 15, 3 e 13, cuja soma resulta em 51.

Questão 05

Resposta: **1**

Se $f(x)$ é uma função de primeiro grau, temos que: $f(x) \ = \ ax + b$, onde a e b são os coeficientes angular e linear, respectivamente.

Com a informação de que $f(-5) = 25$ e $f(5) = -5$, podemos construir o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -5a + b = 25 \\ 5a + b = -5 \end{cases}$$

Para resolver o sistema, faremos:

- Soma a linha 1 com a linha 2:

$$(-5a + b) + (5a + b) = 25 + (-5)$$

$$2b = 20$$

$$b = 10$$

- Subtrai a linha 1 da linha 2:

$$(5a + b) - (-5a + b) = -5 - 25$$

$$10a = -30$$

$$a = -3$$

Uma vez determinado os valores de a e b, encontramos a função, ou seja,
$f(x) = -3x + 10.$

Temos agora:

$$f(x) = 4$$

$$-3x + 10 = 4$$

$$-3x = 4 - 10$$

$$-3x = -6$$

$$x = 2$$

Logo,
$f(2x - 1) = f(2 \times 2 - 1) = f(4 - 1) = f(3) = -3 \times 3 = 10 = -9 + 10 = 1.$

Questão 06

Resposta: **3**

Resolvendo primeiro a equação racional proposta:

$$\frac{x-2}{5}=\frac{x}{3}-\frac{3}{5}$$

Primeiro, escreveremos ambos os lados com o mesmo denominador:

$$\frac{3(x-2)}{15}=\frac{5x-3\times 3}{15}$$

Como os denominadores são iguais, podemos igualar apenas os numeradores. Logo:

$$3(x-2)=5x-9$$

$$3x-6=5x-9$$

$$3x-5x=-9+6$$

$$-2x=-3$$

$$2x=3$$

$$x=\frac{3}{2}$$

Agora precisamos calcular $\log_2 x^5$. Temos:

$$\log_2 x^5=5\log_2 x=5\log_2\left(\frac{3}{2}\right)=5(\log_2 3-\log_2 2)=5\left(\frac{\log 3}{\log 2}-1\right)=5\left(\frac{0{,}48}{0{,}30}-1\right)=$$

$$=5(1{,}6-1)=5\times 0{,}6=3$$

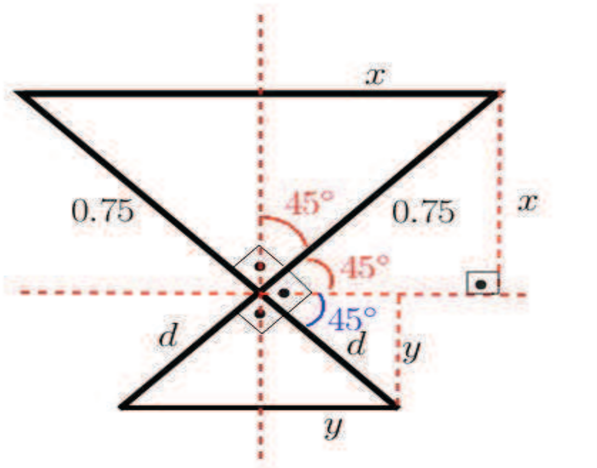
Note que $\log 2$ significa logaritmo de 2 na base 10 e $\log 3$ significa logaritmo de 3 na base 10, ambos fornecidos com valores aproximados com 2 casas decimais.

Questão 7

Letra: B

Solução

A situação matemática do problema está representada pela figura abaixo:



Como $0.75 = \dfrac{3}{2}d \Rightarrow d = \dfrac{2 \cdot 0.75}{3} \Rightarrow d = 0.5$

Vamos analisar o quadrado de referência Q_1 de lado x, conforme exibe a parte superior do varal na figura. Aplicando a fórmula consolidada "*diagonal do quadrado* $=$ *lado* $\cdot \sqrt{2}$", temos que:

$$\underbrace{\text{diagonal}} = \text{lado} \times \sqrt{2}$$

$$0.75 = x \cdot \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{0.75\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 0.53$$

Vamos analisar agora o quadrado Q_2 de lado y, conforme exibe a parte inferior do varal na figura.

Sabendo-se que $d = 0.5$, conforme o cálculo no início da resolução da questão e aplicando a fórmula consolidada "*diagonal do quadrado* $=$ *lado* $\cdot \sqrt{2}$", temos que:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\text{diagonal}} &= \text{lado} \times \sqrt{2} \\
\underbrace{d} &= y\sqrt{2} \\
0.5 &= y\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{0.5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 0.35
\end{aligned}
$$

Desta forma, temos que:

$$
\begin{aligned}
\text{altura do varal} &= \underbrace{x} + \underbrace{y} \\
&= 0.53 + 0.35 \\
&= 0.88
\end{aligned}
$$

Questão 8

Letra: B.

Solução:

Analisando a afirmação I: Para responder a esta questão, basta analisar o parâmetro pH da fórmula $pH = -\text{Log}_{10}[H^+]$ para os diferentes tipos de solução. Por exemplo,
Se $pH = 6 \underbrace{\Rightarrow}_{pH<7}$ a solução é ácida. Substituinto $pH = 6$ na fórmula dada, temos que:

$$\begin{aligned} \underbrace{pH} &= -\text{Log}_{10}[H^+] \\ 6 &= -\text{Log}_{10}[H^+] \quad \times (-1) \\ -6 &= \text{Log}_{10}[H^+] \Rightarrow \text{Log}_{10}[H^+] = -6 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. de log}} \quad [H^+] = 10^{-6} \end{aligned}$$

Se $pH = 8 underbrace \Rightarrow_{pH>7}$ a solução é básica. Substituindo $pH = 8$ na fórmula dada, temos que:
$\underbrace{pH} = -\text{Log}_{10}[H^+]$

$8 = -\text{Log}_{10}[H^+] \quad \times (-1)$
$-8 = \text{Log}_{10}[H^+] \Rightarrow \text{Log}_{10}[H^+] = -8 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. de log}} \quad [H^+] = 10^{-8}$

Veja que a concentração de $[H^+]$ na solução ácida é maior do que a concentração de $[H^+]$ na solução básica, pois

$$10^{-6} > 10^{-8}$$

Logo, a afirmação I é verdadeira.
Analisando a afirmação II:
Como a água pura é uma solução neutra $\Rightarrow pH = 7$. Substituindo $pH = 7$ na

fórmula dada, temos que:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{pH} &= -\mathrm{Log}_{10}[H^{+}] \\
7 &= -\mathrm{Log}_{10}[H^{+}] \quad \times(-1) \\
-7 &= \mathrm{Log}_{10}[H^{+}] \Rightarrow \mathrm{Log}_{10}[H^{+}] = -7 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{def. de log}} \quad [H^{+}] = 10^{-7}
\end{aligned}
$$

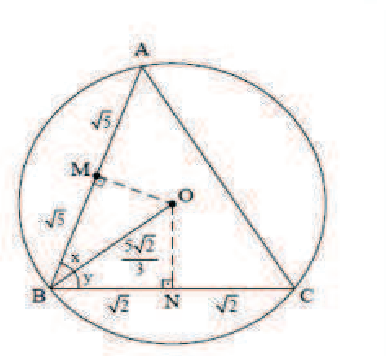
Logo, a afirmação II é verdadeira. Como as duas afirmações, I e II, são independentes, então as asserções I e II são proposições verdadeiras, mas II não é uma justificativa correta da I.

Questão 9

Resposta: 6

Solução:

A figura abaixo ilustra a situação descrita pelo enunciado.



Se M e N são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB e BC do triângulo ABC inscrito no círculo de centro O, então, no âmbito do triângulo ΔOBM temos que:

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Rel. fundam.}} \text{sen}(x) = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

No âmbito do triângulo ΔBON, temos que:

$$\cos(y) = \frac{\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{5} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Rel. fundam.}} \text{sen}(y) = \frac{4}{5}$$

Utilizando a fórmula de soma de arcos para seno, temos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(x+y) &= \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x) \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \qquad (1) \end{aligned}$$

Como $\text{Área}_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \text{sen}(x+y)$, então

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \text{sen}(x+y) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Questão 10

Resposta: **15**

Os itens são:

1. (F) cos(θ) > 0
2. (F) sen(θ)cos(θ) = 0,3
3. (V) |tan(2θ)| = 0,75
4. (F) cossec(2θ) = - 3/5
5. (F) |sen(θ)| = 0,3

Neste caso: $N_V = 1$ e $N_F = 4$ logo:

$$\left|\boldsymbol{N_V - (N_V)^2}\right| = \left|\mathbf{1 - 4^2}\right| = |\mathbf{1 - 16}| = |\mathbf{-15}| = \mathbf{15}$$

<u>Explicações Gerais:</u>

Foi dito que o ângulo θ pertence ao segundo quadrante, ou seja, $\theta \in [90°, 180°]$. Logo:

$$\cos\theta < 0$$
$$\operatorname{sen}\theta > 0.$$

Logo, o ângulo 2θ pertencerá ao terceiro ou ao quarto quadrante, ou seja, $\theta \in [180°, 360°]$. Qualquer ângulo do terceiro ou quarto quadrante terá seno negativo. Neste caso:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = -0{,}6$$

Pela relação fundamental da trigonometria temos:

$$\operatorname{sen}^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) = 1$$
$$(-0{,}6)^2 + \cos^2(2\theta) = 1$$
$$0{,}36 + \cos^2(2\theta) = 1$$
$$\cos^2(2\theta) = 1 - 0{,}36$$
$$\cos^2(2\theta) = 0{,}64$$
$$\cos(2\theta) = \pm 0{,}8$$

<u>Justificativa para cada item.</u>

- Item 1 - **FALSO**. Como foi dito, o ângulo θ pertence ao segundo quadrante, logo cos(θ) é negativo.

- Item 2 – **FALSO**.

$$\operatorname{sen}(2\theta) = \operatorname{sen}(\theta + \theta) = \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} = \frac{-0{,}6}{2} = -0{,}3$$

- Item 3 - **VERDADEIRO**.

$$|\tan(2\theta)| = \left|\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)}\right| = \left|\frac{-0{,}6}{\pm 0{,}8}\right| = |\mp 0{,}75| = 0{,}75$$

- Item 4 - **FALSO**.

$$\operatorname{cossec}(2\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{1}{-0{,}6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

- Item 3 - **FALSO**.

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\cos(2\theta) = (1 - \operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$2\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos(2\theta)$$
$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$
$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}$$
$$|\operatorname{sen}\theta| = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}$$
$$|\operatorname{sen}\theta| = \sqrt{\frac{1 - 0{,}8}{2}}$$
$$|\operatorname{sen}\theta| \cong 0{,}316$$

Note que no item foi afirmado que $|\operatorname{sen}\theta|$ era igual a 0,3 e não aproximadamente igual a 0,3.

Questão 11

Letra: **E**

Visto que a praça é circular, o perímetro da praça será o comprimento de uma circunferência.

$$C = 2\pi R = 2\pi\left(\frac{20}{\pi}\right) = 40\ m$$

Neste caso, cada volta na praça equivale a 40 metros. Visto que durante uma semana a pessoa percorreu $15{,}24\ km$, ou seja, $15240\ m$. O total percorrido equivale a 381 voltas durante a semana.

$$Número\ de\ Voltas = \frac{15240\ m}{40\ m/volta} = 381\ voltas$$

Veja que o número de voltas a cada dia da semana forma uma Progressão Geométrica (PG) de razão 2.

Dia da Semana	**Número de Voltas**
Domingo	a_1
Segunda	$a_2 = 2a_1$
Terça	$a_3 = 2a_2$
Quarta	$a_4 = 2a_3$
Quinta	$a_5 = 2a_4$
Sexta	$a_6 = 2a_5$
Sábado	$a_7 = 2a_6$

O termo geral de uma PG de razão q é dado por:

$$a_n = (q^{n-1})a_1$$

Soma dos termos de uma PG finita de razão q é dado por:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Como sabemos que a soma dos 7 termos (dias da semana) é 381 e a razão da PG é 2, podemos calcular o primeiro termo.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_7 = \frac{a_1(2^7 - 1)}{2 - 1}$$

$$381 = \frac{a_1(2^7 - 1)}{2 - 1}$$

$$381 = a_1(128 - 1)$$

$$381 = a_1(127)$$

$$a_1 = 3$$

Descoberto o valor do número de voltas do primeiro dia podemos calcular o número de voltas da quinta-feira (quinto dia, ou seja, quinto termo da PG).

$$a_n = (q^{n-1})a_1$$

$$a_5 = (2^{5-1})3$$

$$a_5 = (2^4)3$$

$$a_5 = (16)3$$

$$a_5 = 48$$

Questão 12

Letra: **C**

Analisando os itens.

I. **VERDADEIRO**.

O valor pago à vista tem desconto de 5% sobre R$ 16.500,00.

$\frac{5}{100} \times 16500 = 825.$

Logo, o valor pago foi $R\$\ 16.500{,}00 - R\$\ 825{,}00 = R\$\ 15.675{,}00.$

II. **FALSO**.

Se multiplicar 20 parcelas de R$ 877,80 cada, teremos:

$$2 \times R\$\ 877{,}80 = R\$\ 17.556{,}00$$

Ou seja, o valor pago é superior ao valor do orçamento.

III. **VERDADEIRO**.

Opção 2: $R\$\ 17.556{,}00$

Opção 1: $R\$\ 15.675{,}00$

Fazendo a razão dos 2 valores, temos:

$$\frac{17556}{15675} = 1{,}12 = 1 + 0{,}12 = 1 + \frac{12}{100}$$

Ou seja, o valor da opção 2 é 12% superior ao valor da opção 1.

IV. **FALSO**.

Opção 2: $R\$\ 17.556{,}00$

Orçamento: $R\$\ 16.500{,}00$

Fazendo a razão dos 2 valores, temos:

$$\frac{17556}{16500} = 1{,}064 = 1 + 0{,}064 = 1 + \frac{6{,}4}{100}$$

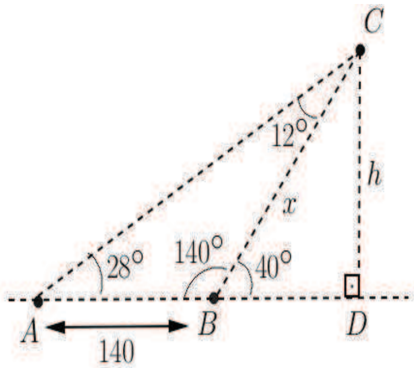
Ou seja, o valor da opção 2 é $6{,}04\%$ superior ao valor do orçamento.

Questão 13

Resposta: 203

Solução:

A figura abaixo ilustra a situação descrita pelo enunciado.



Aplicando a *lei dos senos* no triângulo ABC, nós temos que:

$$\frac{140}{\text{sen}(12^\circ)} = \frac{x}{\text{sen}(28^\circ)} \Rightarrow x = \frac{140 \cdot \text{sen}(28^\circ)}{\text{sen}(12^\circ)} \qquad (I)$$

Aplicando a razão trigonométrica seno ao triângulo ΔBDC, nós temos que:

$$\text{sen}(40^\circ) = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot \text{sen}(40^\circ) \qquad (II)$$

Substituindo I em II, nós temos que:

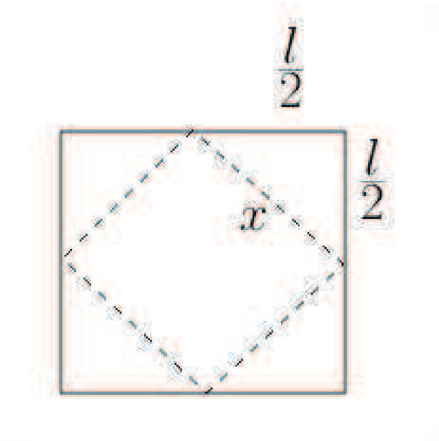
$$h = \frac{140 \cdot \text{sen}(28^\circ)}{\text{sen}(12^\circ)} \cdot \text{sen}(40^\circ) \approx 203$$

Questão 14

Resposta: 8

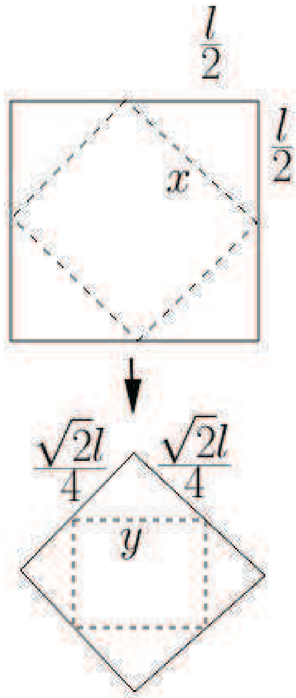
Solução:

Analisando o quadrado do canto superior direito no passo 1 do processo de dobradura:



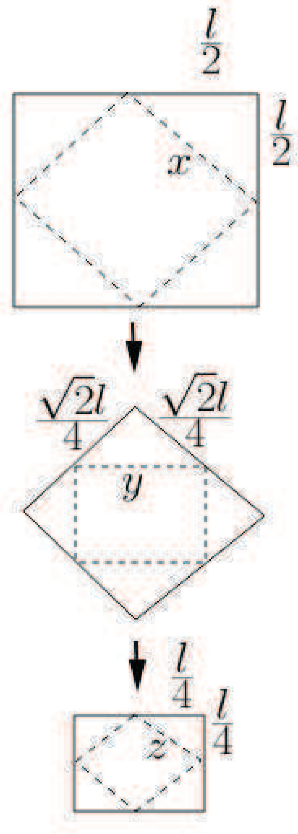
$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Teor. Pitág.}} \quad x^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2l^2}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}l}{2}$$

Seguindo o procedimento da dobradura, vamos analisar o losango obtido pela dobradura dos quatro cantos, conforme exibe a figura abaixo.



$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Teor. Pitág.}} \quad y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}l}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}l}{4}\right)^2 = \frac{4l^2}{16} = \frac{l^2}{4} \Rightarrow y = \frac{l}{2}$$

Seguindo o procedimento, vamos analisar o quadrilatero final, conforme exibe a figura.



$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Teor. Pitág.}} \quad z^2 = \left(\frac{l}{16}\right)^2 + \left(\frac{l}{16}\right)^2 = \frac{2l^2}{16} = \frac{l^2}{8} \Rightarrow z^2 = \frac{l^2}{8}$$

Logo a área final é $\frac{1}{8}$ da área inicial, e, portanto, $\dfrac{A_i}{A_f} = 8$.

Questão 15

Resposta: **25**

Seja o preço de venda P_V e o preço e compra P_C. O lucro é a diferença entre o valor pelo qual um objeto é vendido e o valor que foi pago na aquisição. Logo, o lucro L é dado por:

$$L = P_V - P_C$$

O problema diz que o comerciante pretende que o lucro seja de 20% sobre o preço de venda, teremos que:

$$L = \left(\frac{20}{100}\right) P_V = 0{,}2P_V$$

Igualando as duas expressões acima, temos:

$$L = P_V - P_C$$
$$0{,}2P_V = P_V - P_C$$
$$0{,}2P_V - P_V = -P_C$$
$$-0{,}8P_V = -P_C$$
$$0{,}8P_V = P_C$$
$$P_V = \frac{P_C}{0{,}8}$$
$$P_V = \left(\frac{1}{0{,}8}\right) P_C$$
$$P_V = 1{,}25P_C$$

Note que $1{,}25 = 1 + \frac{25}{100}$, ou seja, o preço de venda tem que ser 25% do valor que foi comprado.

Questão 16

Letra: **A**

Preço Original: P.

Preço após o aumento de $A\%$: $P_A = \left(1 + \frac{A}{100}\right) P$.

Preço após o desconto de $D\%$ sobre o preço P_A: $P_D = \left(1 - \frac{D}{100}\right) P_A$.

O problema quer que:

$$P_D = P$$

$$\left(1 - \frac{D}{100}\right) P_A = P$$

$$\left(1 - \frac{D}{100}\right)\left(1 + \frac{A}{100}\right) P = P$$

$$\left(1 - \frac{D}{100}\right)\left(1 + \frac{A}{100}\right) = \frac{P}{P}$$

$$1 + \frac{A}{100} - \frac{D}{100} - \frac{AD}{10000} = 1$$

$$\frac{A}{100} - \frac{D}{100} - \frac{AD}{10000} = 1 - 1$$

$$\frac{100A - 100D - AD}{10000} = 0$$

$$100A - 100D - AD = 0$$

$$A(100 - D) = 100D$$

$$A = \frac{100D}{(100 - D)}$$

$$A = \frac{100D}{100\left(1 - \frac{D}{100}\right)}$$

$$A = \frac{D}{\left(1 - \frac{D}{100}\right)}$$

Questão 17

Letra: **E**

Item I. **FALSO**.

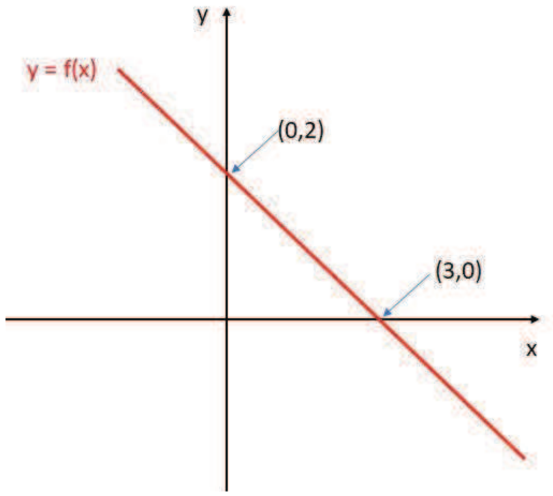
Quando a função $g(x)$ corta o eixo x, temos que $g(x) = 0$. Logo,

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau, temos que as raízes são: $x = -1$ e $x = 3$. Portanto corta o eixo em um valor positivo e em um valor negativo.

Item II. **VERDADEIRO**.

Podemos visualizar geometricamente, sem necessidade de cálculo. Como o ponto $(0,2)$ pertence a função $f(x)$, para ela também passar por algum ponto positivo do eixo x, a função $f(x)$ precisa ter coeficiente angular negativo, ou seja, $a < 0$.



Se substituir $f(x) = 0$ e $x = 3$, teremos:

$$f(x) = ax + 2$$

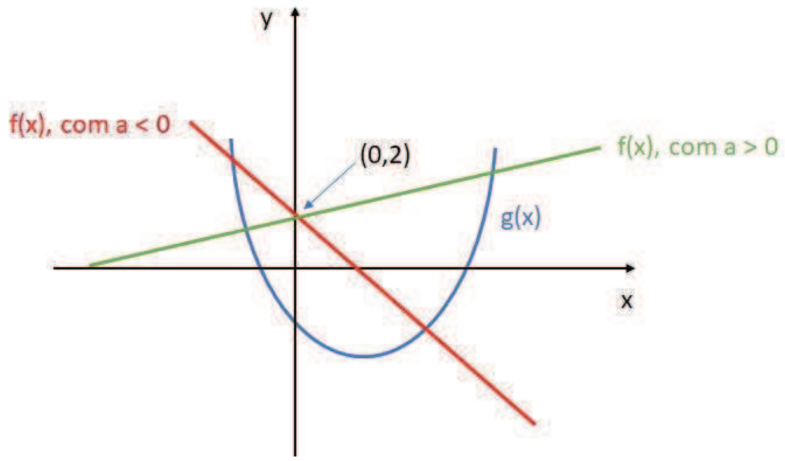
$$0 = 3a + 2$$

$$-3a = 2$$

$$a = -\frac{2}{3} < 0$$

Item III. **FALSO**.

Geometricamente temos:



Note que pela configuração, a reta da função $f(x)$ interceptará a parábola da função $g(x)$ em dois pontos sempre.

Para mostrar analiticamente, temos que a interseção requer $g(x) = f(x)$. Neste caso:

$$x^2 - 2x - 3 = ax + 2$$

$$x^2 - 2x - ax - 3 - 2 = 0$$

$$x^2 - (2 + a)x - 5 = 0$$

Ao resolver a equação de segundo grau temos que as raízes são:

$$x = \frac{-[-(2 + a)] \pm \sqrt{[-(2 + a)]^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{(2 + a) \pm \sqrt{(2 + a)^2 + 20}}{2}$$

Analisando o termo dentro da raiz quadrada: $(2 + a)^2 + 20$, percebemos que este termo é sempre positivo, ou seja, a equação de segundo grau terá duas raízes reais positivas. Analisando os casos:

- Não ter intersecção entre $f(x)$ e $g(x)$:

$$(2 + a)^2 + 20 < 0$$

$$(2 + a)^2 < -20 \text{ (Impossível)}$$

- Para ter uma intersecção entre f(x) e $g(x)$:

$$(2 + a)^2 + 20 = 0$$

$$(2 + a)^2 = -20 \text{ (Impossível)}$$

- Para não ter duas intersecções entre $f(x)$ e $g(x)$:

$$(2+a)^2+20>0$$

$$(2+a)^2>-20 \text{ (Verdade para qualquer valor de } a\text{)}$$

Portanto a função $f(x)$ e $g(x)$ se interceptam em dois pontos.

Item IV. **VERDADEIRO**.

Calculando as coordenadas do vértice da parábola $g(x)$.

$$x_v=-\frac{(-2)}{2\times 1}=1$$

$$y_v=g(x_v)=g(1)=1^2-2\times 1-3=1-2-3=-4$$

Vamos calcular o valor do coeficiente angular da função $f(x)$ para ela passar no ponto $(1,-4)$.

$$f(x)=ax+2$$

$$-4=a\times 1+2$$

$$-4-2=a$$

$$a=-6$$

Questão 18

Letra: **B**

Letra (a) – INCORRETA.

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log a = 3 + (-2) = 3 - 2 = 1$$

Letra (b) – CORRETA.

$$\log_a 10 = \frac{\log 10}{\log a} = \frac{1}{3}$$

Letra (c) – INCORRETA.

$$\log b^2 = 2 \log b = 2 \times (-2) = -4$$

Letra (d) – INCORRETA.

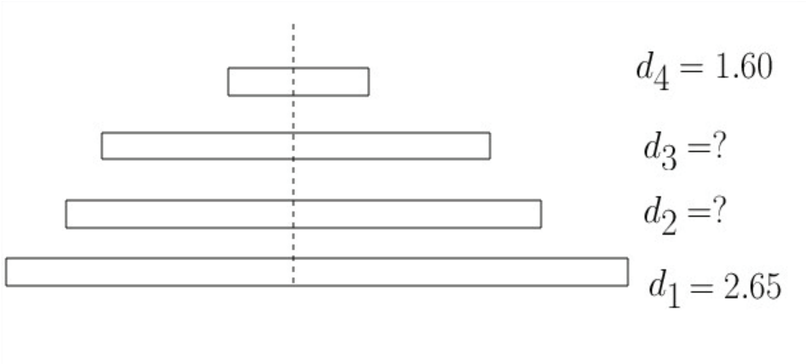
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$$

Questão 19

Resposta: 85

Solução:

A figura abaixo ilustra a nova situação envolvendo 4 plataformas circulares.



De acordo com o critério do enunciado do problema, temos que *o diâmetro de uma plataforma que está entre duas plataformas (a imediatamente superior e a imediatamente inferior) é igual à média aritmética destas duas plataformas*. Então, temos que:

$$\begin{cases} d_3 = \dfrac{1.6 + d_2}{2} & (I) \\ d_2 = \dfrac{d_3 + 2.65}{2} & (II) \end{cases}$$

Segue de II que:

$$\begin{aligned} 2d_2 &= d_3 + 2.65 \\ \Rightarrow d_3 &= 2d_2 - 2.65 \qquad (III) \end{aligned}$$

Substituindo III em I, temos que:

$$
\begin{aligned}
2d_2 - 2.65 &= \frac{1.6 + d_2}{2} \\
2 \cdot (2d_2 - 2.65) &= 1.6 + d_2 \\
4d_2 - 5.3 &= 1.6 + d_2 \\
4d_2 - d_2 &= 1.6 + 5.3 \\
3d_2 &= 6.9 \\
d_2 &= \frac{6.9}{3} \\
d_2 &= 2.3 \text{ m}
\end{aligned}
$$

Substituindo $d_3 = 2.3$ em I, temos que:

$$
\begin{aligned}
d_3 &= \frac{1.6 + 2.3}{2} \\
&= \frac{3.9}{2} \\
d_3 &= 1.95 \text{ m}
\end{aligned}
$$

Neste sentido, a razão $\dfrac{d_2}{d_3}$ fica dada por:

$$
\begin{aligned}
\frac{d_2}{d_3} &= \frac{2.3}{1.95} \\
&= \frac{\frac{23}{10}}{\frac{195}{100}} \\
&= \frac{23}{10} \cdot \frac{100}{195} \\
&= \frac{46}{39}
\end{aligned}
$$

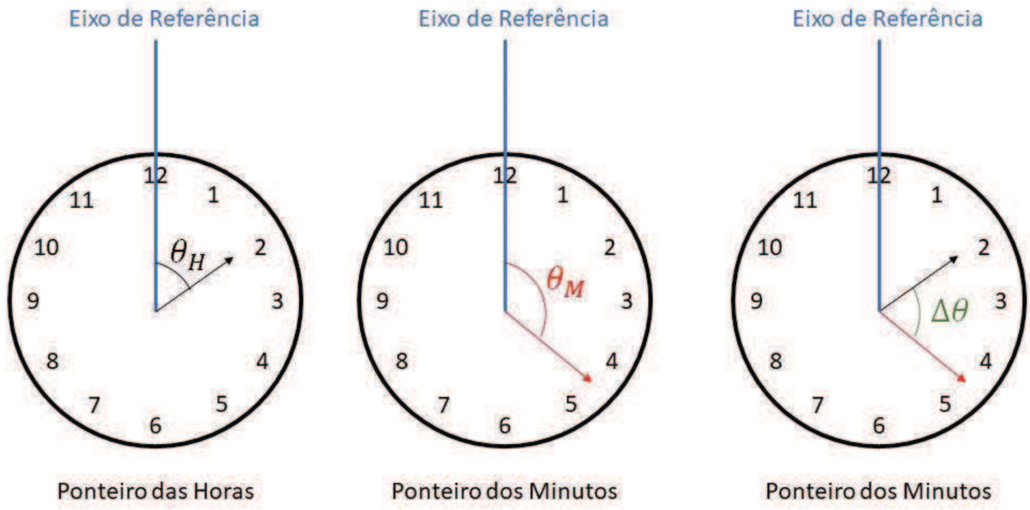
Então,

$$\frac{d_2}{d_3} = \frac{a}{b} = \frac{46}{39} \Rightarrow a + b = 46 + 39 = 85$$

Questão 20

Letra: **D**

A figura abaixo ilustra a posição dos ponteiros de hora e de minutos de um relógio convencional analógico. Definimos o ângulo dos ponteiros em relação a um eixo vertical, passando pelo número 12, conforme ilustrado na figura abaixo.



Note que o ponteiro de horas demora 12 horas para dar uma volta completa ($360°$). Logo, em uma certa hora H, o ângulo do ponteiro das horas será:

$$\theta_H = \left(\frac{360°}{12}\right) H$$

Neste mesmo raciocínio, o ponteiro de minutos demora 1 hora para dar uma volta completa ($360°$). Logo, em uma certa hora H, o ângulo do ponteiro dos minutos será:

$$\theta_M = \left(\frac{360°}{1}\right) [H - m]$$

Na expressão acima o parâmetro m é um número inteiro, que representa apenas a hora cheia, sempre entre 0 e 12. Por exemplo: se a hora no relógio for 2 horas e 45minutos, teremos: $H = 2{,}75$ (representação decimal de 2 horas e 45 minutos) e $m = 2$. Subtraímos o número de voltas completas para ter o ângulo entre $0°$ e $360°$. No exemplo de 2 horas e 45 minutos, teríamos:

$$\theta_H = \left(\frac{360°}{12}\right) 2{,}75 = 82{,}5°$$

$$\theta_M = \left(\frac{360°}{1}\right) [2{,}75 - 2] = 270°$$

Se os ponteiros estão alinhados, então $\theta_H = \theta_M$. Ou seja,

$$\left(\frac{360°}{12}\right) H = (360°)(H - m)$$

$$360° H = 12(360°)(H - m)$$

$$360° H = 4320°(H - m)$$

$$360° H - 4320° H = -4320° m$$

$$-3920° H = -4320° m$$

$$H = \left(\frac{4320°}{3920°}\right) m$$

$$H = \left(\frac{12}{11}\right) m$$

Ou seja, a hora (representa em decimal), para o encontro dos ponteiros será dada pela expressão acima, onde m é a hora cheia. Como queremos o encontro após 6 horas da manhã, o primeiro encontro dos ponteiros após este horário será aquele para $m = 6$, ou seja:

$$H = \left(\frac{12}{11}\right) 6 = \frac{72}{11} = 6h + \frac{6}{11} h$$

$$H = 6h + \frac{6}{11} \times 60min = 6h + \frac{360}{11} min = 6h + \left(32 + \frac{8}{11}\right) min$$

$$H = 6h + 32min + \frac{8}{11} \times 60seg = 6h + 32min + \frac{480}{11} seg \cong 6h + 32min + 44seg$$

Como curiosidade, as horas nas quais os ponteiros estão alinhados, foram descritas na tabela (forma decimal e no formato de “hora:minutos:segundos”).

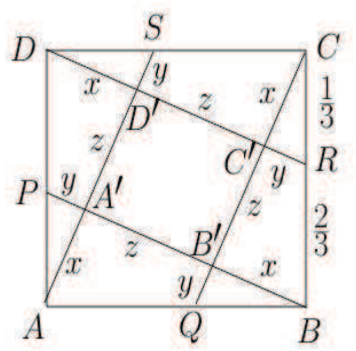
m	Hora Decimal (H)	Hora (hh:mm:ss)
0	0,0000	00:00:00
1	1,0909	01:05:27
2	2,1818	02:10:55
3	3,2727	03:16:22
4	4,3636	04:21:49
5	5,4545	05:27:16
6	6,5455	06:32:44
7	7,6364	07:38:11
8	8,7273	08:43:38
9	9,8182	09:49:05
10	10,9091	10:54:33
11	12,0000	12:00:00
12	13,0909	13:05:27
13	14,1818	14:10:55
14	15,2727	15:16:22
15	16,3636	16:21:49
16	17,4545	17:27:16
17	18,5455	18:32:44
18	19,6364	19:38:11
19	20,7273	20:43:38
20	21,8182	21:49:05
21	22,9091	22:54:33
22	24,0000	00:00:00

Questão 22

Letra: **A**

Solução:

A figura abaixo ilustra a situação descrita pelo enunciado.

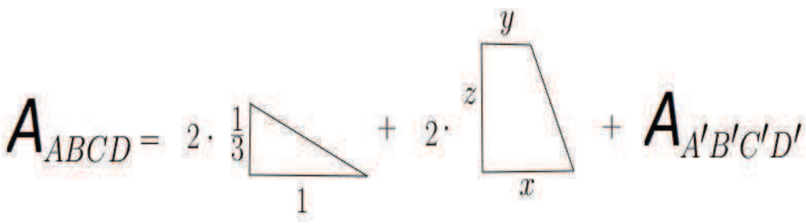


Teorema de Tales:

$$\frac{CC'}{C'B'} = \frac{CR}{RB}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}z$$

Por semelhança de triângulos:

$$\frac{CC'}{CB'} = \frac{C'R}{B'B}$$
$$\frac{x}{x+z} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = y(x+z) \underbrace{\Rightarrow}_{x=\frac{1}{2}z} \frac{z^2}{4} = y(\frac{z}{2}+z) \Rightarrow \frac{z^2}{4} = y\frac{3z}{2} \Rightarrow y = \frac{z}{6}$$



$$\begin{aligned}
\Rightarrow 1 &= 2 \cdot \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{2} + 2 \cdot \frac{(x+y) \cdot z}{2} + z^2 \\
1 &= \frac{1}{3} + (\frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z) + z^2 \\
\frac{2}{3} &= \frac{4}{6}z^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = \frac{4}{10} \Rightarrow z^2 = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Então,

$$A_{A'B'C'D'} = \frac{2}{5}$$

Questão 23

Letra: **A**

Analisando os itens.

I. **FALSO**.

A função $f(x)$ admite inversa $(f^{-1}(x))$, porém o domínio é: $\mathcal{Dom}(f^{-1}(x)) = \mathbb{R}_{+}^{*}$. Veja abaixo a função inversa de $f(x)$.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x\,, 0 < x \leq 1 \\ x - 1, 1 < x \leq 2 \\ \sqrt{\dfrac{x}{2}}, x > 2 \end{cases}$$

II. **VERDADEIRO**.

Vejamos a função composta $(f \circ g)(x)$:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2^{x-1}\,, & x \leq 0 \\ x\,, & 0 < x \leq 1 \\ 2(x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

- $(f \circ g)(0) = 2^{0-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
- $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
- $(f \circ g)\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

III. **FALSO**.

Vejamos a função composta $(g \circ f)(x)$:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2^{x} - 1\,, & x \leq 0 \\ x\,, & 0 < x \leq 1 \\ 2x^2 - 1\,, & x > 1 \end{cases}$$

Comparando com a função composta $(f \circ g)(x)$ mostrada no item II, percebemos que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

IV. **VERDADEIRO**.

Para admitir inversa, a função precisa ser bijetora (injetora e sobrejetora). A função $(g \circ f)(x)$ é bijetora, logo admite inversa.

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x-1)}{\ln 2} & , -1 < x \leq 0 \\ x\,, & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\,, & x > 1 \end{cases}$$

V. **FALSO**.

Para admitir inversa, a função precisa ser bijetora (injetora e sobrejetora). A função $(f \circ g)(x)$ não é injetora, logo não é bijetora, portanto não admite inversa.

Exemplificando que $(f \circ g)(x)$ não é injetora, ou seja, encontrar dois valores diferentes para x que levam a mesma imagem.

$$(f \circ g)(0) = \frac{1}{2}$$

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Questão 24

Letra: **D**

A partir das informações, chegamos no sistema:

$$\begin{cases} 4+x+5+2=1+3+y+(z+2)+2 \\ 5+y+(x+1)+z=9 \\ x+4+z+2=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-z=-3 \\ x+y+z=3 \\ x+z=2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, teremos:

$x=0$, $y=1$ e $z=2$.

A matriz, fica:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & x & 5 & 2 \\ 1 & 3 & y & z+2 \\ 6 & y & x+1 & z-2 \\ x & 4 & z & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A) **INCORRETA.**

Total de 36 pessoas (soma dos elementos da matriz.

B) **INCORRETA**.

Há apartamentos vagos, (1º andar: apartamento 2; 3º andar: apartamento 4 e 4º andar: apartamento 1).

C) **INCORRETA**.

Total de 8 pessoas, porém há um apartamento vago (o apartamento 4).

D) **CORRETA**.

S_2 = Soma da coluna 2 (apartamentos 2): 8

S_4 =Soma da coluna 4 (apartamentos 4): 8

S_{4a} =Soma da linha 4 (4º andar): 8

Note que:

$$S_2 \ + S_4 \ = \ 2 \times S_{4a}$$
$$8 + 8 = 2 \times 8$$
$$16 = 16$$

E) **INCORRETA**.

A letra (D) é correta.

Questão 25

Letra: **E**

As opções para compra dos 3 micro-ondas são:

- **B – I – I:** Probabilidade: $\frac{10}{15} \times \frac{5}{14} \times \frac{4}{13} = \frac{20}{273}$

- **I – B – I:** Probabilidade: $\frac{5}{15} \times \frac{10}{14} \times \frac{4}{13} = \frac{20}{273}$

- **I – I – B:** Probabilidade: $\frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13} = \frac{20}{273}$

Vejam que as três opções têm a mesma chance (probabilidade). Logo, a probabilidade final será:

$$P(1\ micro - ondas\ branco) = 3 \times \frac{20}{273} = \frac{20}{91}$$