Questão 01

Resposta: **14**

Como x, y e z são números inteiros positivos, é necessário que:

$$2x = 6y = 9z = n$$

com n igual a um número inteiro que, ao dividir 2, 6 ou 9, resulte em número inteiro.

Note que o menor n seria aquele que é o MMC de 2, 6 e 9, neste caso:

$$MMC(2,6,9) = 18$$

Se $n = 18$, então:

$$2x = 18 \rightarrow x = 9$$

$$6y = 18 \rightarrow y = 3$$

$$9z = 18 \rightarrow z = 2$$

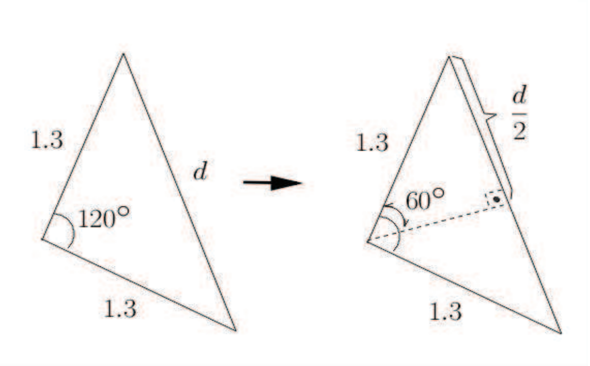
Logo, o menor valor para $x + y + z$ é:

$$\boldsymbol{x + y + z = 9 + 3 + 2 = 14}$$

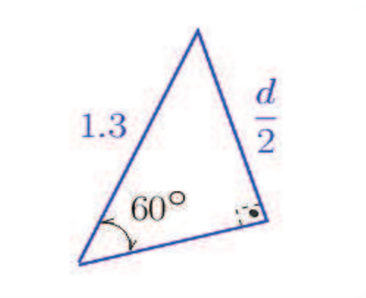
Questão 2

Resposta: 607.

Solução:



Aplicando uma trigonometria no triângulo azul, extraído da figura da situação acima, temos que:



$$
\begin{aligned}
\underbrace{\operatorname{sen}(60^\circ)} &= \frac{\frac{d}{2}}{1.3} \\
\frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{d}{2.6}
\end{aligned}
$$

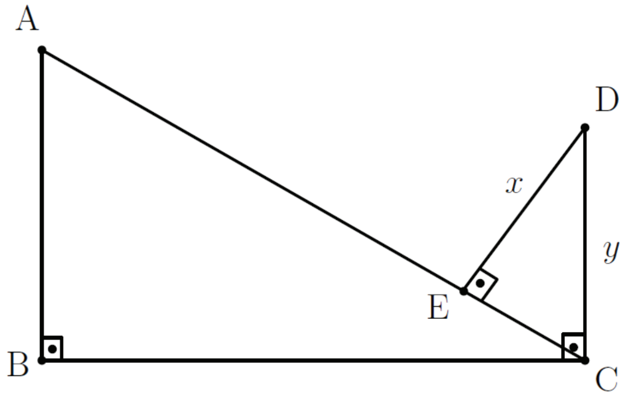
Isto implica que:

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\sqrt{3}\cdot 2.6}{2} \\
\Rightarrow d^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\cdot 2.6}{2}\right)^2 \\
d^2 &= \frac{(\sqrt{3})^2\cdot(2.6)^2}{2^2} \\
d^2 &= \frac{3\cdot 6.76}{4} \\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{676}{100} \\
&= \frac{2028^{\div 4}}{400^{\div 4}} \\
&= \frac{507}{100}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{507}{100} \Rightarrow a+b = 507+100 \Rightarrow a+b=607
$$

Questão 03

Resposta: **16**



Seja $B\hat{C}A = \alpha$. Assim, $B\hat{A}C = 90° - \alpha$. Como $B\hat{C}A$ e $E\hat{C}D$ são complementares, teremos que $E\hat{C}D = 90° - \alpha$, e portanto $C\hat{D}E = \alpha$. Concluimos então que ABC e CED são semelhantes. Dessa forma, por semelhança de triângulos teremos que:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{x}} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{15}{\mathrm{x}} \rightarrow \mathrm{x} = \frac{15}{2}$$

e

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EC}} \rightarrow \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{y}} = \frac{8}{4} \rightarrow \mathrm{y} = \frac{\mathrm{AC}}{2}.$$

Como ABC é um triângulo retângulo, teremos que

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 \rightarrow AC = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$$

Assim,

$$y = \frac{17}{2}$$

Logo,

$$\boldsymbol{x + y = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = \frac{32}{2} = 16}$$

Questão 04

Alternativa: **C**

Analisando as assertivas:

I. **FALSA.**

Note que $f(x) = 1 - x$ para $x \leq 0$.

Logo, $f(0) = 1 - 0 = 1$, ou seja, existe o valor $f(0)$.

II. **VERDADEIRA.**

Se $x \leq 0$, então $f(x) = 1 - x$ pela definição. Os pontos de interseção satisfazem $f(x) = g(x)$. Logo,

$$f(x) = g(x)$$
$$1 - x = x^2$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Note que nesta solução, $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$. Como o f(x) utilizado só vale para $x \leq 0$, há apenas um ponto de interseção que corresponde ao x_2.

III. **FALSA.**

$f\big(g(-1)\big) = f((-1)^2) = f(1) = 1$

$g\big(f(-1)\big) = g\big(1 - (-1)\big) = g(2) = 2^2 = 4$

Logo, $f(g(-1)) \neq g(f(-1))$.

IV. **VERDADEIRA.**

Note que $g(x)$ é uma função polinomial de grau 2, portanto contínua para qualquer x pertencente aos reais.

V. **VERDADEIRA.**

Note que a função f(x) não cruza o eixo x.

- Para valores de $x > 0$, $f(x) = 1/x$ e não tem valor de x que faz $f(x) = 0$.

  $\frac{1}{x} = 0 \rightarrow 1 = 0$ e não pode ser verdade. Portanto não há raízes para $x > 0$.

- Para valores de $x \leq 0$, teríamos:

$$f(x) = 0$$

$$1 - x = 0$$

$$x = 1$$

  Note que a raiz seria x=1, que não pertence a região de $x \leq 0$.

Logo não há raiz nem para $x > 0$ nem para $x \leq 0$.

Logo, há **3** assertivas **VERDADEIRAS**.

Questão 05

Alternativa: **C**

Para resolver esta questão, basta substituir R pelo valor dado e calcular o tempo t, usando logaritmo.

$$R = \left(\frac{1}{10^{12}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715}$$

$$5{,}4 \times 10^{-18} = \left(\frac{1}{10^{12}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715}$$

$$(5{,}4 \times 10^{-18}) \cdot (1 \times 10^{12}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715}$$

$$5{,}4 \times 10^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715}$$

$$\log(5{,}4 \times 10^{-6}) = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715}$$

$$\log(5{,}4 \times 10^{-6}) = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715}$$

$$\log(5{,}4 \times 10^{-6}) = \left(\frac{t}{5715}\right)\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$t = 5715 \cdot \frac{\log(5{,}4 \times 10^{-6})}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$t \cong 100.004\ anos$$

Questão 06

Alternativa: **D**

Para resolver este problema, é necessário calcular a área representada por cada cor e comparar o tamanho desta área com a área total do alvo.

Área total do alvo ($\boldsymbol{A_T}$): quadrado de lado igual a 50 cm.

$$A_T = 50^2 = 2.500\ cm^2$$

Área vermelha ($\boldsymbol{A_{VM}}$): círculo de raio igual a 5 cm.

$$A_{VM} = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54\ cm^2$$

Área azul ($\boldsymbol{A_{AZ}}$): coroa circular de raio interno 5 cm e raio externo 15 cm.

$$A_{AZ} = \pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 5^2 = 628{,}32\ cm^2$$

Área verde ($\boldsymbol{A_{VD}}$): área total subtraída das áreas azul e vermelha.

$$A_{VD} = 2.500 - 78{,}54 - 628{,}32 = 1793{,}14$$

Calculando as probabilidades de cada região. A probabilidade de acerto em cada cor será dada por:

$$P(cor) = \frac{Área\ da\ Cor}{Área\ Total}$$

Logo:

Probabilidade de acerto na área vermelha ($\boldsymbol{P_{VM}}$): $P_{VM} = \frac{78{,}54}{2.500} = 0{,}0314.$

Probabilidade de acerto na área azul ($\boldsymbol{P_{AZ}}$): $P_{AZ} = \frac{628{,}32}{2.500} = 0{,}2513.$

Probabilidade de acerto na área verde ($\boldsymbol{P_{VD}}$): $P_{VD} = \frac{1.793{,}14}{2.500} = 0{,}7173.$

A pessoa irá lançar dois dardos e pretende-se obter a probabilidade de acertar pelo menos um na área vermelha. Pode-se abordar este problema por dois caminhos:

- Caminho A: calcular a chance de não acertar nenhum na região vermelha. A probabilidade de não acertar a região vermelha é $1 - 0{,}0314 = 0{,}9686$. Neste caso o resultado seria:

  NÃO VERMELHO e NÃO VERMELHO

  $$P(NÃO\ VERMELHO\ e\ NÃO\ VERMELHO) = 0{,}9686 \cdot 0{,}9686 = 0{,}9382$$

  Se a chance de não acertar nenhum no vermelho é 0,9382, a chance de acertar pelo menos um dardo no vermelho será:

  $$(1 - 0{,}9382) = 0{,}0618 \cong \mathbf{6{,}2}\%$$

- Caminho B: calcular a chance de acertar um dardo na região vermelha e outro dado em outra cor e somar com a chance de acertar os dois dardos na região vermelha.

  A probabilidade de não acertar a região vermelha é $1 - 0{,}0314 = 0{,}9686$.

  1 Dardo no vermelho

  NÃO VERMELHO e VERMELHO:

  $$P(NÃO\ VERMELHO\ e\ VERMELHO) = 0{,}9686 \cdot 0{,}0314 = 0{,}0304$$

  OU

  VERMELHO e NÃO VERMELHO:

  $$P(VERMELHO\ e\ NÃO\ VERMELHO) = 0{,}0314 \cdot 9686 = 0{,}0304$$

  $$P(1\ Dardo\ no\ vermelho) = 0{,}0304 + 0{,}0304 = 0{,}0608$$

  2 Dardos no vermelho

  VERMELHO e VERMELHO:

  $$P(VERMELHO\ e\ VERMELHO) = 0{,}0314 \cdot 0{,}0314 = 0{,}0010$$

  $$P(2\ Dardos\ no\ vermelho) = 0{,}0010$$

  Agora, basta somar a probabilidade de acertar 1 dado no vermelho com a probabilidade de acertar 2 dardos no vermelho.

  $$0{,}0608 + 0{,}0010 = 0{,}0618 \cong \mathbf{6{,}2}\%$$

Questão 07

Resposta: **3050**

Note neste problema que a quantidade q é a variável do problema, sendo que a quantidade encomendada é a mesma quantidade produzida. Neste problema, temos:

- **Custo Total**: será a soma do custo fixo mínimo (R$ 1.000,00) mais o custo de produção de q unidades, sendo que cada unidade acrescenta R$ 2,00.

$$C_T = 1000 + 2q$$

- **Receita Total**: montante que será pago pela compra das q unidades encomendadas. Cada unidade tem preço dado por $p = 20 - 0{,}02q$. Logo

$$R_T = p \cdot q = (20 - 0{,}02q) \cdot q = 20q - 0{,}02q^2$$

$$R_T = (20 - 0{,}02q) \cdot q$$

$$R_T = 20q - 0{,}02q^2$$

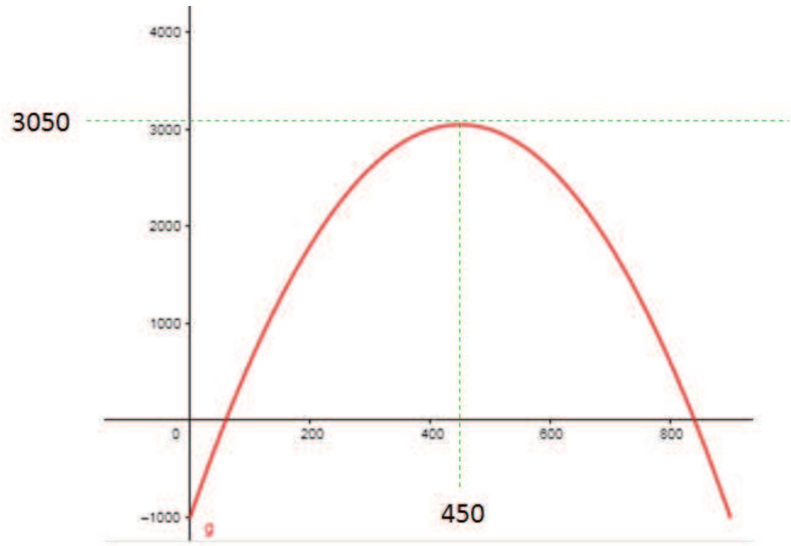
- **Lucro**: diferença entre a receita total e o custo total. Neste caso, o lucro, em função da quantidade q, será:

$$L = R_T - C_T$$

$$L = 20q - 0{,}02q^2 - (1000 + 2q)$$

$$L = -0{,}02q^2 + 18q - 1000$$

Note que o lucro é uma função de segundo grau e o gráfico é uma parábola voltada para baixo. Ver o gráfico da função abaixo:



Esta função tem um máximo que ocorre no vértice da parábola. Calculando as coordenadas do vértice:

$$q_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{2 \cdot (-0{,}02)} = 450$$

Calculando o lucro para q=450, ponto de máximo da função.

$$L(450) = -0{,}02 \cdot (450)^2 + 18 \cdot 450 - 1000$$

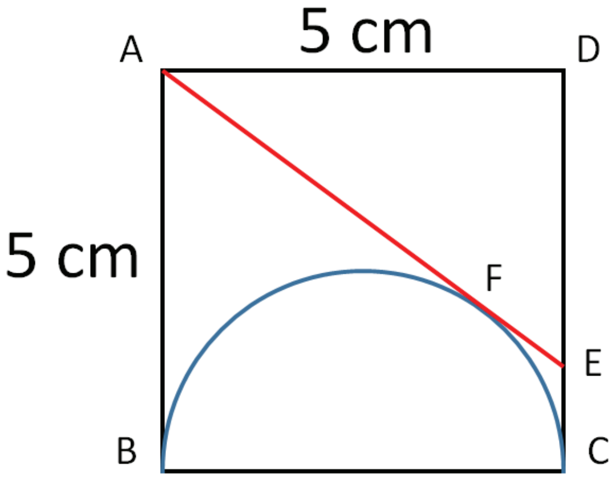
$$L(450) = 3.050$$

Logo, o lucro será máximo quando forem encomendadas 450 unidades, resultando em um lucro de **R$ 3.050,00**.

Questão 08

Alternativa: **D**

Vamos começar pela figura. Note que foram adicionados alguns pontos para facilitar a resolução.



Deve-se notar que duas retas tangentes a uma circunferência a partir de um ponto externo tem o mesmo comprimento. Note que B e F são pontos de tangencia a partir do ponto A. Neste caso:

$$AF = AB = 5$$

Similarmente, F e C são pontos de tangencia a partir do ponto E, logo:

$$EF = EC = x$$

Neste caso, teremos o triângulo retângulo ADE, retângulo em D, sendo AE a hipotenusa, AD e DE os catetos. Note que:

$$AD = 5$$

$$DE = DC - EC = 5 - x$$

$$AE = AF + EF = 5 + x$$

Com estes valores e usando o Teorema de Pitágoras:

$$(AE)^2 = (AD)^2 + (DE)^2$$

$$(5 + x)^2 = 5^2 + (5 - x)^2$$

$$25 + 2x + x^2 = 25 + 25 - 2x + x^2$$

$$2x + 2x = 25$$

$$4x = 25$$

$$\boldsymbol{x = 6,25}$$

Questão 09

Resposta: 183.

Solução:

Dado que todas as colunas têm soma de entradas igual a 1, então a matriz é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & c \\ 0,60 & b & 0,15 \\ a & 0,10 & 0,80 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.05 \\ 0.6 & 0.7 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

No prazo de vinte anos aplica-se duas vezes a matriz de transição, ou seja, $A \times A$.

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.05 \\ 0.6 & 0.7 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.05 \\ 0.6 & 0.7 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Ou seja, $A \times A$ =

$$\begin{pmatrix} 0.215 & 0.205 & 0.085 \\ 0.615 & 0.625 & 0.255 \\ 0.17 & 0.17 & 0.66 \end{pmatrix}$$

Neste sentido, a probabilidade no prazo de 20 anos de uma pessoa com capacidade financeira RICA passar para pobre é dada pelo elemento a_{13} da matriz acima, ou seja,

$$a_{13} = 0.085 \Rightarrow \frac{85}{1000} = \frac{17}{200}$$
$$\Rightarrow a_{13} = \frac{a}{b} = \frac{17}{200}$$

Então

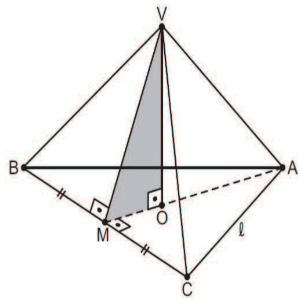
$$b - a = 200 - 17 = 183$$

Questão 10

Resposta: 11.

Solução:

A figura abaixo exibe a situação do problema:



Observe que as faces do tetraedro são tipicamente triângulos equiláteros. O ponto O é o *baricentro* do triângulo que figura como a base do tetraedro. Neste sentido,

$$\begin{aligned} OM &= \frac{1}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{l\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Note que VM é o segmento que corresponde a altura da face triangular ΔVBC. Ou seja,

$$VM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Aplicando o *Teorema de Pitágoras* no triângulo VOM, temos que:

$$\begin{aligned}(VO)^2 + (OM)^2 &= (VM)^2 \\ (VO)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 &= \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow (VO)^2 &= \frac{3l^2}{4} - \frac{3l^2}{36} \\ &= \frac{24l^2}{36}\end{aligned}$$

Então,

$$(VO) = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

Uma vez que $(\bar{VO})$ é a altura do tetraedro relativa à base ABC, então o volume do tetraedro é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\Rightarrow V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12} \qquad (I)$$

Para achar o valor de l, basta calcular a distância entre os pontos A e B. Vejamos,

$$\begin{aligned}d_{AB} &= \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} \\ d_{AB} &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow l = 2\sqrt{2} \qquad (II)$$

Voltando II em I, temos que:

$$\begin{aligned}V &= \frac{(2\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} \\ V &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Então,

$$V = \frac{a}{b} = \frac{8}{3} \Rightarrow a + b = 8 + 3 = 11$$