

Questão 01

Alternativa: C

Analisando as assertivas:

I. FALSA.

Note que $f(x) = 1 - x$ para $x \leq 0$.

Logo, $f(0) = 1 - 0 = 1$, ou seja, existe o valor $f(0)$.

II. VERDADEIRA.

Se $x \leq 0$, então $f(x) = 1 - x$ pela definição. Os pontos de interseção satisfazem $f(x) = g(x)$. Logo,

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\1 - x &= x^2 \\x^2 + x - 1 &= 0 \\x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \\x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Note que nesta solução, $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$. Como o $f(x)$ utilizado só vale para $x \leq 0$, há apenas um ponto de interseção que corresponde ao x_2 .

III. FALSA.

$$f(g(-1)) = f((-1)^2) = f(1) = 1$$

$$g(f(-1)) = g(1 - (-1)) = g(2) = 2^2 = 4$$

Logo, $f(g(-1)) \neq g(f(-1))$.

IV. VERDADEIRA.

Note que $g(x)$ é uma função polinomial de grau 2, portanto contínua para qualquer x pertencente aos reais.

V. VERDADEIRA.

Note que a função $f(x)$ não cruza o eixo x .

- Para valores de $x > 0$, $f(x) = 1/x$ e não tem valor de x que faz $f(x) = 0$.

$\frac{1}{x} = 0 \rightarrow 1 = 0$ e não pode ser verdade. Portanto não há raízes para $x > 0$.

- Para valores de $x \leq 0$, teríamos:

$$f(x) = 0$$

$$1 - x = 0$$

$$x = 1$$

Note que a raiz seria $x=1$, que não pertence a região de $x \leq 0$.

Logo não há raiz nem para $x > 0$ nem para $x \leq 0$.

Logo, há **3** assertivas **VERDADEIRAS**.

Questão 02

Alternativa: C

Para resolver esta questão, basta substituir R pelo valor dado e calcular o tempo t , usando logaritmo.

$$\begin{aligned}R &= \left(\frac{1}{10^{12}}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\5,4 \times 10^{-18} &= \left(\frac{1}{10^{12}}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\(5,4 \times 10^{-18}) \cdot (1 \times 10^{12}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\5,4 \times 10^{-6} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\\log(5,4 \times 10^{-6}) &= \log\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\\log(5,4 \times 10^{-6}) &= \log\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715} \\\log(5,4 \times 10^{-6}) &= \left(\frac{t}{5715}\right) \log\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$t = 5715 \cdot \frac{\log(5,4 \times 10^{-6})}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$t \cong 100.004 \text{ anos}$$

Questão 03

Alternativa: D

Para resolver este problema, é necessário calcular a área representada por cada cor e comparar o tamanho desta área com a área total do alvo.

Área total do alvo (A_T): quadrado de lado igual a 50 cm.

$$A_T = 50^2 = 2.500 \text{ cm}^2$$

Área vermelha (A_{VM}): círculo de raio igual a 5 cm.

$$A_{VM} = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ cm}^2$$

Área azul (A_{AZ}): coroa circular de raio interno 5 cm e raio externo 15 cm.

$$A_{AZ} = \pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 5^2 = 628,32 \text{ cm}^2$$

Área verde (A_{VD}): área total subtraída das áreas azul e vermelha.

$$A_{VD} = 2.500 - 78,54 - 628,32 = 1793,14$$

Calculando as probabilidades de cada região. A probabilidade de acerto em cada cor será dada por:

$$P(\text{cor}) = \frac{\text{Área da Cor}}{\text{Área Total}}$$

Logo:

Probabilidade de acerto na área vermelha (P_{VM}): $P_{VM} = \frac{78,54}{2.500} = 0,0314$.

Probabilidade de acerto na área azul (P_{AZ}): $P_{AZ} = \frac{628,32}{2.500} = 0,2513$.

Probabilidade de acerto na área verde (P_{VD}): $P_{VD} = \frac{1.793,14}{2.500} = 0,7173$.

A pessoa irá lançar dois dardos e pretende-se obter a probabilidade de acertar pelo menos um na área vermelha. Pode-se abordar este problema por dois caminhos:

- Caminho A: calcular a chance de não acertar nenhum na região vermelha. A probabilidade de não acertar a região vermelha é $1 - 0,0314 = 0,9686$. Neste caso o resultado seria:

NÃO VERMELHO e NÃO VERMELHO

$$P(\text{NÃO VERMELHO e NÃO VERMELHO}) = 0,9686 \cdot 0,9686 = 0,9382$$

Se a chance de não acertar nenhum no vermelho é 0,9382, a chance de acertar pelo menos um dardo no vermelho será:

$$(1 - 0,9382) = 0,0618 \cong \mathbf{6,2\%}$$

- Caminho B: calcular a chance de acertar um dardo na região vermelha e outro dado em outra cor e somar com a chance de acertar os dois dardos na região vermelha.

A probabilidade de não acertar a região vermelha é $1 - 0,0314 = 0,9686$.

1 Dardo no vermelho

NÃO VERMELHO e VERMELHO:

$$P(\text{NÃO VERMELHO e VERMELHO}) = 0,9686 \cdot 0,0314 = 0,0304$$

OU

VERMELHO e NÃO VERMELHO:

$$P(\text{VERMELHO e NÃO VERMELHO}) = 0,0314 \cdot 0,9686 = 0,0304$$

$$P(1 \text{ Dardo no vermelho}) = 0,0304 + 0,0304 = 0,0608$$

2 Dardos no vermelho

VERMELHO e VERMELHO:

$$P(\text{VERMELHO e VERMELHO}) = 0,0314 \cdot 0,0314 = 0,0010$$

$$P(2 \text{ Dardos no vermelho}) = 0,0010$$

Agora, basta somar a probabilidade de acertar 1 dado no vermelho com a probabilidade de acertar 2 dardos no vermelho.

$$0,0608 + 0,0010 = 0,0618 \cong \mathbf{6,2\%}$$

Questão 04

Resposta: **3050**

Note neste problema que a quantidade q é a variável do problema, sendo que a quantidade encomendada é a mesma quantidade produzida. Neste problema, temos:

- **Custo Total:** será a soma do custo fixo mínimo (R\$ 1.000,00) mais o custo de produção de q unidades, sendo que cada unidade acrescenta R\$ 2,00.

$$C_T = 1000 + 2q$$

- **Receita Total:** montante que será pago pela compra das q unidades encomendadas. Cada unidade tem preço dado por $p = 20 - 0,02q$. Logo

$$R_T = p \cdot q = (20 - 0,02q) \cdot q = 20q - 0,02q^2$$

$$R_T = (20 - 0,02q) \cdot q$$

$$R_T = 20q - 0,02q^2$$

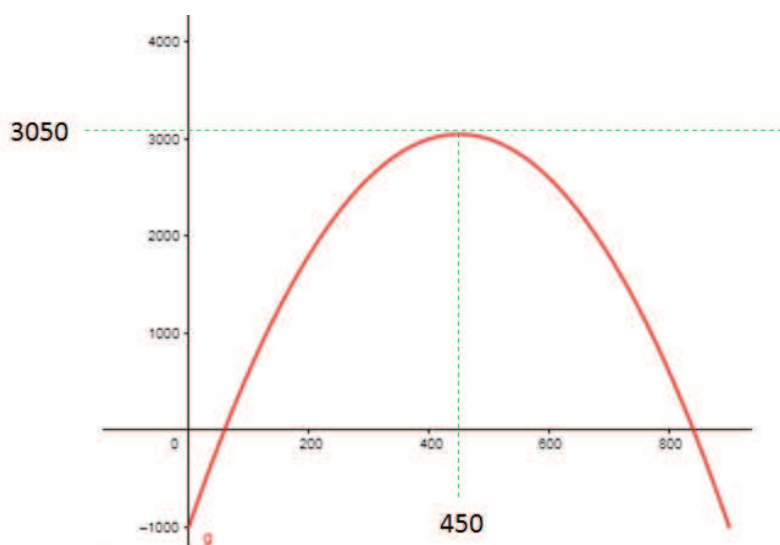
- **Lucro:** diferença entre a receita total e o custo total. Neste caso, o lucro, em função da quantidade q , será:

$$L = R_T - C_T$$

$$L = 20q - 0,02q^2 - (1000 + 2q)$$

$$L = -0,02q^2 + 18q - 1000$$

Note que o lucro é uma função de segundo grau e o gráfico é uma parábola voltada para baixo. Ver o gráfico da função abaixo:



Esta função tem um máximo que ocorre no vértice da parábola. Calculando as coordenadas do vértice:

$$q_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{2 \cdot (-0,02)} = 450$$

Calculando o lucro para $q=450$, ponto de máximo da função.

$$L(450) = -0,02 \cdot (450)^2 + 18 \cdot 450 - 1000$$

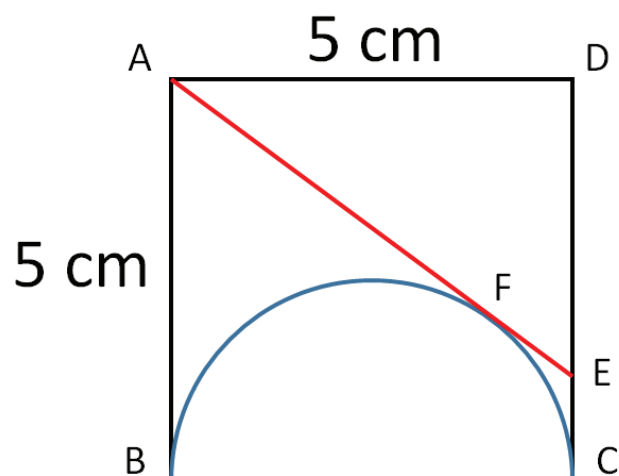
$$L(450) = 3.050$$

Logo, o lucro será máximo quando forem encomendadas 450 unidades, resultando em um lucro de **R\$ 3.050,00**.

Questão 05

Alternativa: **D**

Vamos começar pela figura. Note que foram adicionados alguns pontos para facilitar a resolução.



Deve-se notar que duas retas tangentes a uma circunferência a partir de um ponto externo tem o mesmo comprimento. Note que B e F são pontos de tangência a partir do ponto A. Neste caso:

$$AF = AB = 5$$

Similarmente, F e C são pontos de tangência a partir do ponto E, logo:

$$EF = EC = x$$

Neste caso, teremos o triângulo retângulo ADE, retângulo em D, sendo AE a hipotenusa, AD e DE os catetos. Note que:

$$AD = 5$$

$$DE = DC - EC = 5 - x$$

$$AE = AF + EF = 5 + x$$

Com estes valores e usando o Teorema de Pitágoras:

$$(AE)^2 = (AD)^2 + (DE)^2$$

$$(5 + x)^2 = 5^2 + (5 - x)^2$$

$$25 + 2x + x^2 = 25 + 25 - 2x + x^2$$

$$2x + 2x = 25$$

$$4x = 25$$

$$x = 6,25$$

Questão 6

Resposta: 183.

Solução:

Dado que todas as colunas têm soma de entradas igual a 1, então a matriz é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & c \\ 0,60 & b & 0,15 \\ a & 0,10 & 0,80 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,05 \\ 0,6 & 0,7 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

No prazo de vinte anos aplica-se duas vezes a matriz de transição, ou seja, $A \times A$.

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,05 \\ 0,6 & 0,7 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,05 \\ 0,6 & 0,7 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Ou seja, $A \times A =$

$$\begin{pmatrix} 0,215 & 0,205 & 0,085 \\ 0,615 & 0,625 & 0,255 \\ 0,17 & 0,17 & 0,66 \end{pmatrix}$$

Neste sentido, a probabilidade no prazo de 20 anos de uma pessoa com capacidade financeira RICA passar para pobre é dada pelo elemento a_{13} da matriz acima, ou seja,

$$a_{13} = 0.085 \Rightarrow \frac{85}{1000} = \frac{17}{200}$$
$$\Rightarrow a_{13} = \frac{a}{b} = \frac{17}{200}$$

Então

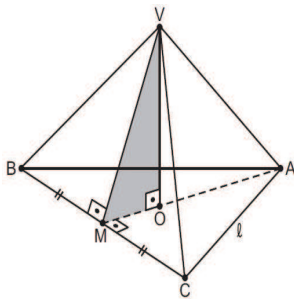
$$b - a = 200 - 17 = 183$$

Questão 7

Resposta: 11.

Solução:

A figura abaixo exhibe a situação do problema:



Observe que as faces do tetraedro são tipicamente triângulos equiláteros. O ponto O é o *baricentro* do triângulo que figura como a base do tetraedro. Neste sentido,

$$\begin{aligned} OM &= \frac{1}{3} \frac{l\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{l\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Note que VM é o segmento que corresponde a altura da face triangular ΔVBC . Ou seja,

$$VM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Aplicando o *Teorema de Pitágoras* no triângulo VOM , temos que:

$$\begin{aligned}
(VO)^2 + (OM)^2 &= (VM)^2 \\
(VO)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 &= \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
\Rightarrow (VO)^2 &= \frac{3l^2}{4} - \frac{3l^2}{36} \\
&= \frac{24l^2}{36}
\end{aligned}$$

Então,

$$(VO) = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

Uma vez que (\bar{VO}) é a altura do tetraedro relativa à base ABC , então o volume do tetraedro é dado por:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12} \\
\Rightarrow V &= \frac{l^3\sqrt{2}}{12} \quad (I)
\end{aligned}$$

Para achar o valor de l , basta calcular a distância entre os pontos A e B . Vejamos,

$$\begin{aligned}
d_{AB} &= \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} \\
d_{AB} &= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow l = 2\sqrt{2} \quad (II)$$

Voltando II em I , temos que:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{(2\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} \\
V &= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Então,

$$V = \frac{a}{b} = \frac{8}{3} \Rightarrow a + b = 8 + 3 = 11$$

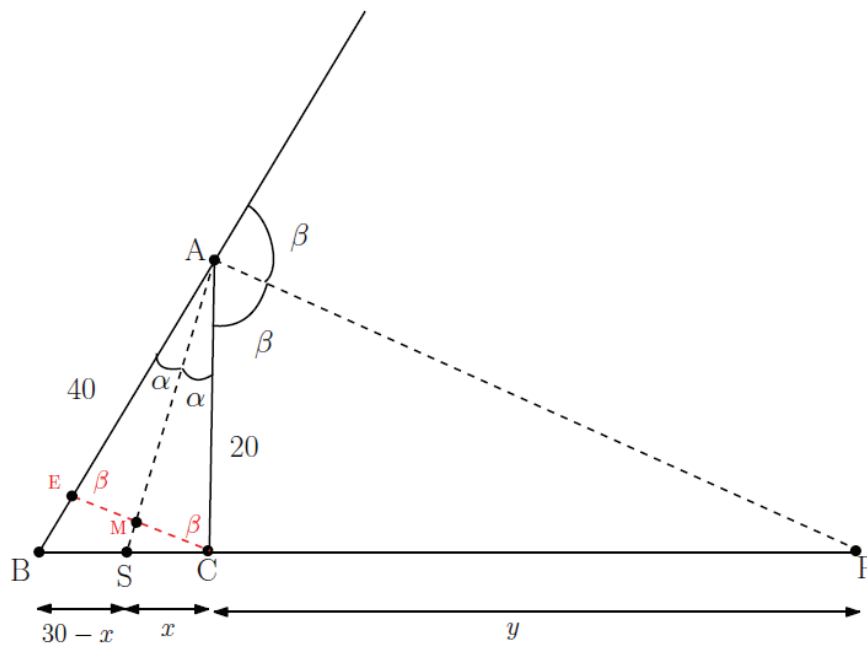
Questão 08

Resposta: **40**

Considere passando por C um segmento CE paralelo a AP. Teremos que EC e PA são paralelas cortadas pelas transversais AC e AB. Assim,

$$\widehat{AEC} = \beta = \widehat{ACE}$$

Dessa forma, os triângulos AEM e ACM serão congruentes e portanto, $AE = 20$.



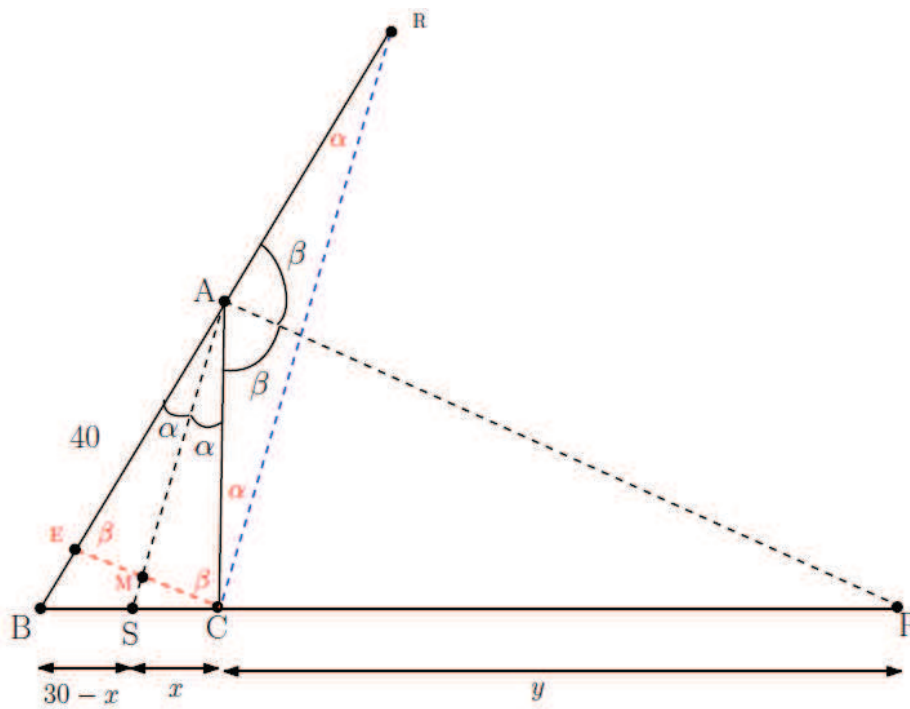
Pelo Teorema de Tales, teremos

$$\frac{y}{20} = \frac{30}{20} \rightarrow y = 30.$$

Considere agora, passando por C um segmento paralelo a SA. Temos que AS e RC são paralelas cortadas pelas transversais AC e RB. Assim,

$$\widehat{ACR} = \alpha = \widehat{ARC}$$

Logo, os triângulos ANC e ANR são congruentes e assim, $AR = 20$.



Pelo Teorema de Tales, teremos

$$\frac{x}{20} = \frac{30-x}{40} \rightarrow x = 10.$$

Logo,

$$SP = x + y = 10 + 30 = \mathbf{40}.$$

Questão 09

Resposta: **3**

Calculando a área da do triângulo da base (A_b). Trata-se de um triângulo equilátero, logo a altura é $H = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ e a sua área será:

$$A_B = \frac{L \times H}{2} = \frac{L \times (L\sqrt{3}/2)}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Pelo enunciado do problema, uma lata de tinta com 900 ml cobre exatamente esta área do triângulo da base. Ou seja, 900 ml rende uma área de $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$. Usando a proporção, podemos prever qual será a área coberta por uma lata de 800 ml.

$$\begin{array}{l} 900 \text{ ml} \text{ --- } \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \\ 800 \text{ ml} \text{ --- } x \end{array}$$

Resolvendo para x , temos:

$$x = \frac{8}{9} \left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{2L^2\sqrt{3}}{9}$$

Portanto, a tinta verde irá cobrir uma área de $\frac{2L^2\sqrt{3}}{9}$. Note que as áreas dos triângulos verdes formam uma PG de razão $1/2$. Para os triângulos verdes:

- Primeiro triângulo verde: $A_1 = \frac{(L/2)(L\sqrt{3}/2)}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{8} = \frac{L^2\sqrt{3}}{8}$
- Segundo triângulo verde: $A_1 = \frac{(L/4)(L\sqrt{3}/2)}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2\sqrt{3}}{8} \right)$
- Terceiro triângulo verde: $A_1 = \frac{(L/8)(L\sqrt{3}/2)}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2\sqrt{3}}{16} \right)$

E assim por diante. Logo, a soma das áreas de n triângulos verdes será dada por:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{A_1(q^n - 1)}{q - 1} \\ S_n &= \frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{8} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1} \end{aligned}$$

Vamos considerar a área pintada pelos 800 ml de tinta para calcular a quantidade n de triângulos:

$$\frac{2L^2\sqrt{3}}{9} = \frac{\frac{L^2\sqrt{3}}{8} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right]}{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\left(\frac{2L^2\sqrt{3}}{9}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{L^2\sqrt{3}}{8}} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{-\frac{L^2\sqrt{3}}{9}}{\frac{L^2\sqrt{3}}{8}} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{-\frac{1}{9}}{\frac{1}{8}} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-\frac{8}{9} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\log\left(\frac{1}{9}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\log\left(\frac{1}{9}\right) = n \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

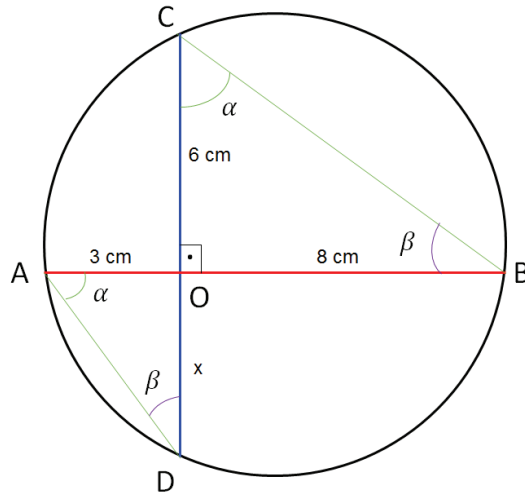
$$\mathbf{n \cong 3,2}$$

Note que a quantidade de tinta pinta 3,2 triângulos verdes, ou seja, **3** triângulos serão completamente pintados.

Questão 10

Resposta: **125**

Para resolver o problema, primeiro precisamos calcular o valor de x , para saber o tamanho das cordas AB e CD . Vejamos a figura com algumas marcações extra:

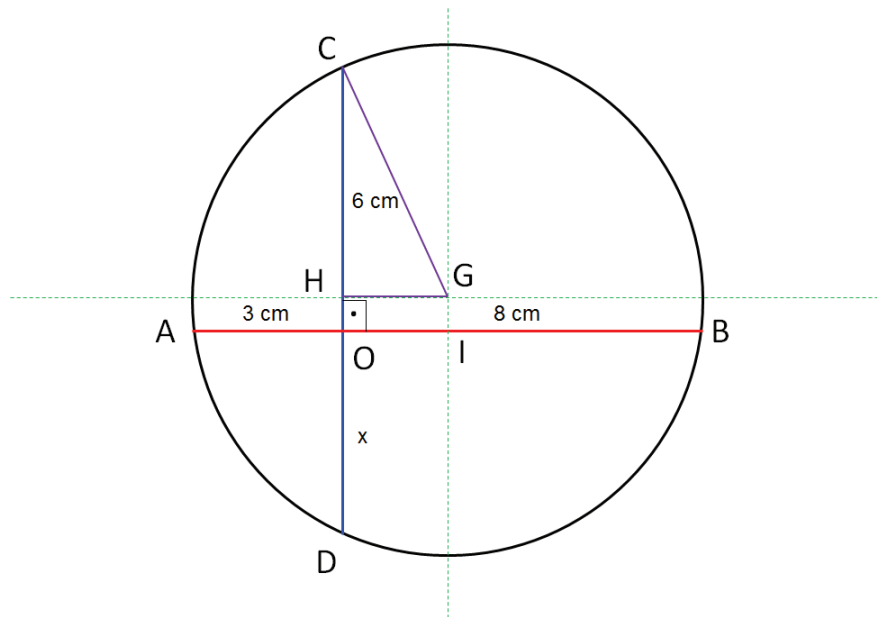


Note pela figura que os triângulos OCB e OAD são semelhantes. Os ângulos marcados estão sobre o mesmo arco. Neste caso:

$$\begin{aligned}\frac{OC}{OA} &= \frac{OB}{OD} \\ \frac{6}{3} &= \frac{8}{x} \\ 6x &= 3 \cdot 8 \\ x &= 4 \text{ cm}\end{aligned}$$

Uma vez determinado x , sabemos o comprimento de cada corda. A corda $AB = 11 \text{ cm}$ e $CD = 10 \text{ cm}$.

Agora, precisamos lembrar que toda corda que passa pelo centro da circunferência G e intercepta outra corda perpendicularmente, divide a corda interceptada ao meio. Veja a próxima figura:



Note que as retas pontilhadas verdes passam pelo centro da circunferência (ponto G) e cruzam as cordas AB e CD perpendicularmente. Neste caso, a corda AB será dividida em duas partes: $AI = IB = 5,5 \text{ cm}$. A corda CD será também dividida em duas partes: $CH = HD = 5 \text{ cm}$.

O segmento CG é o raio da circunferência. Usamos o triângulo CGH para calcular o raio. Neste triângulo deve-se notar que:

$$GH = IO = (AI - AO) = 5,5 - 3 = 2,5 \text{ cm}$$

Logo:

$$(CG)^2 = (CH)^2 + (GH)^2$$

$$(CG)^2 = 5^2 + 2,5^2$$

$$(CG)^2 = 31,25$$

$$CG = \sqrt{31,25}$$

Como pede-se o valor de z , temos:

$$z = (2R)^2 = (2 \cdot CG)^2 = (2 \cdot \sqrt{31,25})^2 = 4 \cdot 31,25 = 125$$