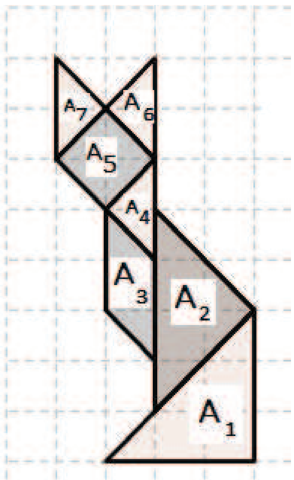
Questão 1

Alternativa: D.

Solução:

A figura abaixo representa a situação do problema:



$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} \\
A_2 &= \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \\
A_3 &= 2 \cdot 1 = 2 \\
A_4 &= \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \\
A_5 &= (\sqrt{2})^2 = 2 \\
A_6 &= \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \\
A_7 &= \frac{2 \cdot 1}{2} = 1
\end{aligned}
$$

$$A_T = \frac{9}{2} + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 = 15,5$$

Questão 02

Resposta: **150000**

Paulo: 30000

Antônio: $30000 + \frac{1}{3} \times 30000 = 30000 + 10000 = 40000$

João: $2 \times 40000 = 80000$

Logo, a herança deixada foi: $30000 + 40000 + 80000 \ = \ 150000$

Questão 03

Letra: **B**

Primeiramente deve-se calcular o volume da laje. A laje tem $35\ m^2$ e $10\ cm\ (0{,}1\ m)$ de altura, logo o volume (V) será:

$$V\ = 35 \times 0{,}1 = 3{,}5\ m^3$$

As partes (cimento + areia + brita) totalizam 7 partes (traço 1:2:4). Dividindo o volume total pelo total de partes, teremos: $3{,}5\ m^3/7 = 0{,}5\ m^3$ por parte. Neste traço de concreto teremos:

- Cimento (1 parte): $0{,}5\ m^3$.
- Areia (2 partes): $1{,}0\ m^3$.
- Brita (4 partes): $2{,}0\ m^3$.

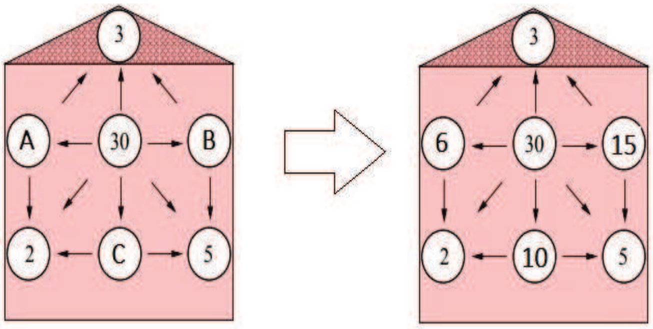
Logo, o volume de areia será de $\mathbf{1,0\ m^3}$.

Questão 4

Resposta: 31.

Solução:

A figura abaixo representa a situação do problema:



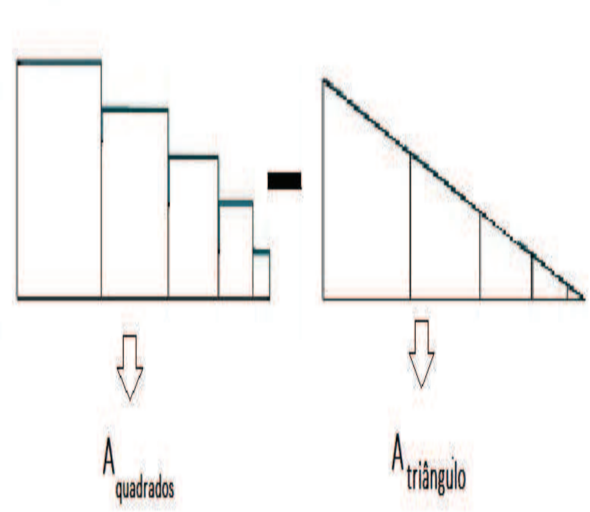
$$A + B + C = 6 + 15 + 10 = 31$$

Questão 05

Resposta: 70.

Solução:

A área da região pintada na cor azul será igual a diferença entre a área da soma dos quadrados e a área do triângulo inferior:



Ou seja,

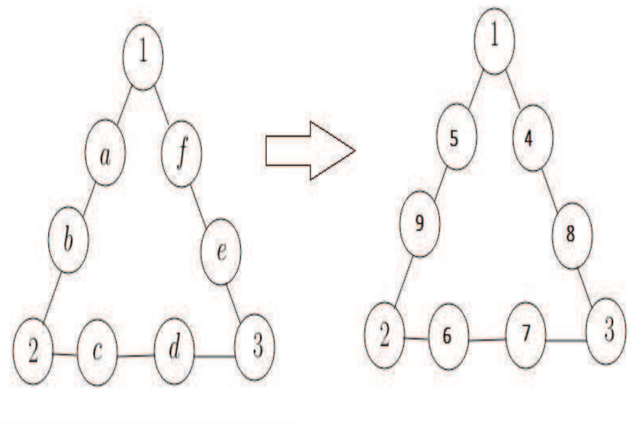
$$
\begin{aligned}
A_{azul} &= A_{\text{quadrados}} - A_{\text{triângulo}} \\
&= (2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2) - \frac{30 \cdot 10}{2} \\
&= 220 - 150 \\
&= 70
\end{aligned}
$$

Questão 06

Resposta: 15.

Solução:

A figura abaixo representa a situação da questão.

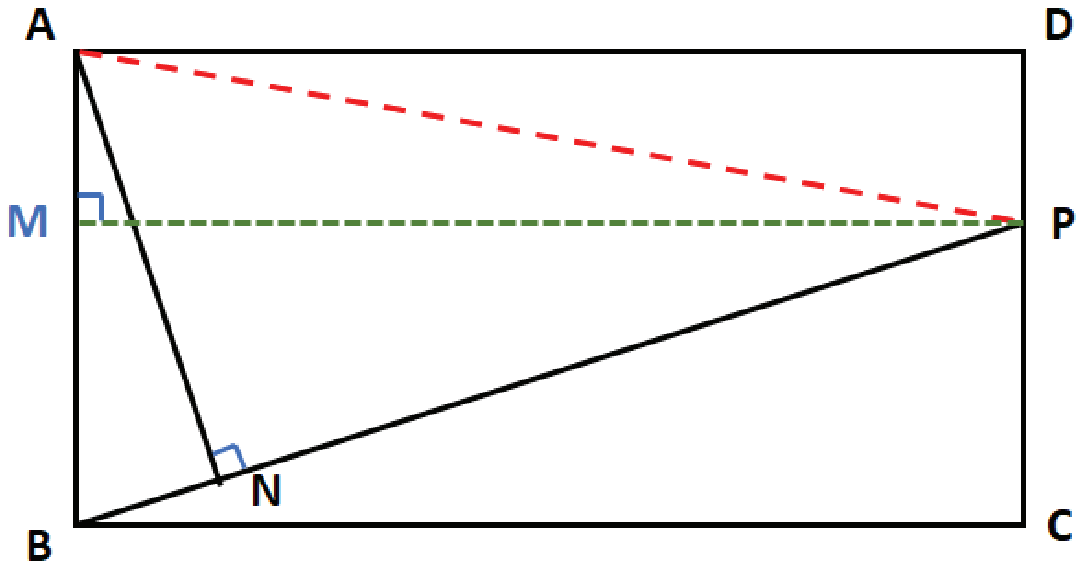


$$a + f + c = 5 + 4 + 6 = 15$$

Questão 07

Resposta: **60**

Considere a figura abaixo. As cores em vermelho, verde e azul foram adicionadas para guiar a resolução.



A área do triângulo ABP pode ser expressa de duas maneiras:

$$A_{ABP}^{(1)} = \frac{1}{2} AB \times MP$$

$$A_{ABP}^{(2)} = \frac{1}{2} BP \times AN$$

Note que $AB = CD = 6$ e que $MP = AD = 10$. Logo, igualando as áreas, temos:

$$A_{ABP}^{(2)} = A_{ABP}^{(1)}$$

$$\frac{1}{2} BP \times AN = \frac{1}{2} AB \times MP$$

$$BP \times AN = 6 \times 10$$

$$BP \times AN = 60$$

Questão 08

Letra: **E**

Vamos começar pela equação:

$$\left(3^a - 4\sqrt{5}\right)\left(3^a + 4\sqrt{5}\right) = 1$$

$$(3^a)^2 - \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 1$$

$$3^{2a} - (4^2)\left(\sqrt{5}\right)^2 = 1$$

$$3^{2a} - 16 \times 5 = 1$$

$$3^{2a} - 80 = 1$$

$$3^{2a} = 1 + 80$$

$$3^{2a} = 81$$

$$3^{2a} = 3^4$$

Logo, para satisfazer a igualdade temos que:

$$2a = 4$$

$$a = 2$$

Voltando na equação $x^2 = a$, vamos achar as duas raízes, x_1 e x_2.

$$x^2 = a$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Neste caso, as raízes são $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_2 = -\sqrt{2}$.

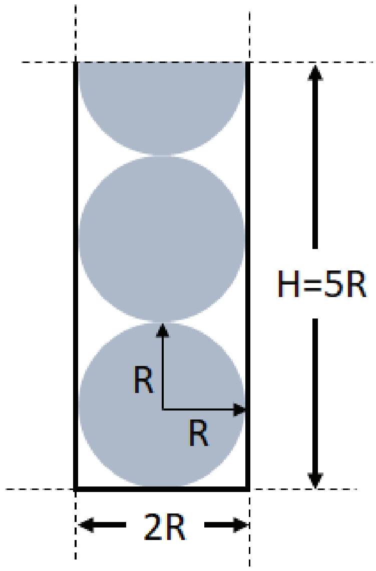
Temos então que o produto das raízes será:

$$x_1 \times x_2 = \left(\sqrt{2}\right) \times \left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2 \times 2} = -\sqrt{4} = -2$$

Questão 09

Letra: **A**

Vamos analisar a imagem da figura, em um corte plano que passa pelo centro do cilindro e das esferas.



Note que temos um cilindro de raio R e altura $H = 5R$ e duas esferas e meia de raio R.

O volume do cilindro será: $V = \pi R^2 H = \pi R^2(5R) = 5\pi R^3$.

O volume de cada esfera: $V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$

O volume de água será:

$$V_a = V - 2{,}5V_e$$

$$V_a = 5\pi R^3 - 2{,}5 \times \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$V_a = 5\pi R^3 - \frac{5}{2} \times \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$V_a = 5\pi R^3 - \frac{10}{3}\pi R^3$$

$$V_a = \frac{15\pi R^3 - 10\pi R^3}{3}$$

$$V_a = \frac{5}{3}\pi R^3$$

Logo, $\frac{V_a}{V} = \frac{\frac{5}{3}\pi R^3}{5\pi R^3} = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$

Questão 10

Letra: **C**

Vamos analisar o problema como uma questão de fluxo (l/h) de cada brigadista.

Brigadista 1: balde de volume V, com fluxo $F_1 = 300\ l/h$

Brigadista 2: balde de volume V/3, logo o fluxo será: $F_2 = \frac{1}{3}F_1 = \frac{1}{3} \times 300 = 100\ l/h.$

Brigadista 2: balde de volume V/5, logo o fluxo será: $F_3 = \frac{1}{5}F_1 = \frac{1}{5} \times 300 = 60\ l/h.$

Note que, o brigadista 1 conseguiria extinguir o fogo em 1 hora, o brigadista 2 em 3 horas, e o brigadista 3 em 5 horas, sendo este tempo se cada um trabalhasse sozinho. Como eles atuaram juntos, o volume de água de cada brigadista, no tempo T será:

Brigadista 1: $V_1 = F_1 \times T = 300T$

Brigadista 2: $V_2 = F_2 \times T = 100T$

Brigadista 3: $V_3 = F_3 \times T = 60T$

Neste caso, temos que:

$$V_1 + V_2 + V_3 = 300$$

$$300T + 100T + 60T = 300$$

$$460T = 300$$

$$T = \frac{300}{460}$$

$$T = \frac{15}{23}$$

Ou seja, o tempo para apagar o incêndio se os três trabalharem juntos será:

$$\frac{15}{23}h = \frac{15}{23} \times 60\ minutos \cong 39\ minutos$$

Questão 11

Resposta: **8**

O consumo (C) é dado por $C = \frac{Distância\ Percorrida}{Volume\ Gasto}$.

No trecho da estrada, o consumo foi $10\ km/l$ e a distância percorrida foi $d_E = 100\ km$. Logo o volume gasto na estrada (V_E) foi:

$$10 = \frac{100}{V_E}$$

$$10V_E = 100$$

$$V_E = \frac{100}{10}$$

$$V_E = 10\ l$$

No trecho urbano, a distância percorrida foi $d_U = 20\ km$. Porém, o total percorrido (d) foi:

$d = d_E + d_U = 100 + 20 = 120\ km$.

Note que após andar $120\ km$, o consumo era $9{,}6\ km/l$. Logo, o volume total gasto de combustível foi:

$$9{,}6 = \frac{120}{V}$$

$$9{,}6V = 120$$

$$V = \frac{120}{9{,}6}$$

$$V = 12{,}5\ l$$

Lembrando que: $V = V_E + V_U$. Logo,

$$12{,}5 = 10 + V_U$$

$$12{,}5 - 10 = V_U$$

$$2{,}5 = V_U$$

$$V_U = 2{,}5\ l$$

Podemos então encontrar o consumo no trecho urbano (C_U):

$$C_U = \frac{d_U}{V_U}$$

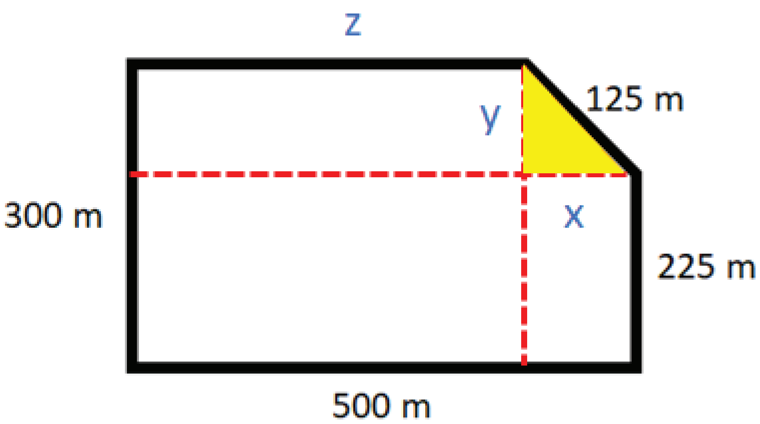
$$C_U = \frac{20}{2,5}$$

$$C_U = 8\ km/l$$

Questão 12

Resposta: **7440**

Vamos analisar o desenho e calcular o valor do lado desconhecido (z) na figura.



Note pelo desenho que: $y + 225 = 300 \rightarrow y = 300 - 225 = 75$.

Observando o triângulo retângulo em amarelo, podemos escrever:

$$125^2 = x^2 + y^2$$

$$15625 = x^2 + 75^2$$

$$15625 = x^2 + 5625$$

$$15625 - 5625 = x^2$$

$$10000 = x^2$$

$x = \pm 100$ (descarta o valor negativo, pois trata-se de medidas (x>0).

Pela figura: $z + x = 500 \rightarrow z + 100 = 500 \rightarrow z = 500 - 100 = 400$.

O perímetro ($2p$) da figura será:

$$2p = 300 + 500 + 225 + 125 + 400 = 1550\, m = 1{,}55\, km.$$

Durante o mês o atleta dá 3 voltas por dia durante 20 dias, o que totaliza no mês 60 voltas. Logo, a distância (d) percorrida no mês será:

$$d = 60 \times 1{,}55 = 93\, km$$

Supondo o gasto calórico médio de $80\, cal/km$, o atleta consumiu, no mês:

$$(80\, cal/km) \times (93\, km) = 7440\, cal$$

Questão 13

Letra: **B**

Como foi dito que a função $f(x)$ admite duas raízes reais iguais, temos que:

$$\Delta = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

Visto que a, b e c formam uma PA de razão $\sqrt{3}$, temos que:

$$b = a + \sqrt{3}$$

$$c = b + \sqrt{3} = \left(a + \sqrt{3}\right) + \sqrt{3} = a + 2\sqrt{3}$$

Voltando na equação do discriminante, temos:

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\left(a + \sqrt{3}\right)^2 - 4a\left(a + 2\sqrt{3}\right) = 0$$

$$a^2 + 2\sqrt{3}a + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4a^2 - 8\sqrt{3}a = 0$$

$$a^2 + 2\sqrt{3}a + 3 - 4a^2 - 8\sqrt{3}a = 0$$

$$-3a^2 - 6\sqrt{3}a + 3 = 0$$

$$-3\left(a^2 + 2\sqrt{3}a - 1\right) = 0$$

$$a^2 + 2\sqrt{3}a - 1 = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau para a, temos:

$$a = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4(1)(-1)}}{2 \times 1}$$

$$a = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 4}}{2}$$

$$a = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$a = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4}{2}$$

$$a = -\sqrt{3} \pm 2$$

$$a_1 = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{e} \qquad a_2 = -2 - \sqrt{3}$$

Como $a > 0$, então temos que:

$$a = 2 - \sqrt{3}$$
$$b = a + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$$
$$c = a + 2\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

A interseção do gráfico da função $f(x)$ com o eixo y, se dá quando $x = 0$. Logo,

$$f(0) = c = 2 + \sqrt{3}$$

Questão 14

Letra: **B**

Vamos analisar cada uma das afirmações:

A) FALSA

Se x=0, temos: $0^3 - 2 \times 0^2 - 4 \times 0 + 8 = 0 + 0 + 0 + 8 = 8$

B) VERDADEIRA

$x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

$x^2(x-2) - 4(x-2)$

$(x-2)(x^2-4)$

$(x-2)(x-2)(x+2)$

$(x-2)^2(x+2)$

$(x+2)(x-2)^2$

C) FALSA

O polinômio é de grau 3, pois é o maior expoente da incógnita x.

D) FALSA

Observando pela forma fatorada do item (B), temos que se $x + 2 < 0$, o polinômio assume valores negativos, pois o outro termo é quadrático, sendo sempre maior ou igual a zero.

Ou seja, qualquer $x < -2$, faz o polinômio assumir valor numérico negativo.

Exemplo: $x = -3$.

$$(-3)^3 - 2 \times (-3)^2 - 4 \times (-3) + 8$$
$$-27 - 18 + 12 + 8$$
$$-25$$

E) FALSA

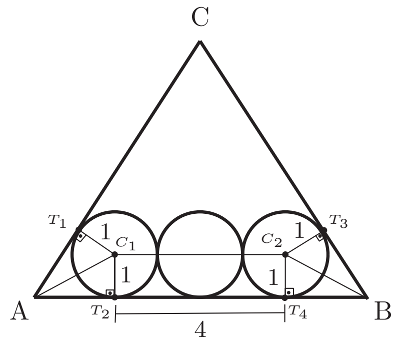
Este item está incorreto, pois a alternativa (B) é correta.

Questão 15

Letra B

Solução:

Os três círculos tem o mesmo raio r. Logo, $3(\pi r^2) = 3\pi$. Portanto, $r = 1$.



Pelo caso de congruência hipotenusa-cateto em triângulos retângulos temos que $AC_1T_1 \equiv AC_1T_2$ e $BC_2T_3 \equiv BC_2T_4$.

Além disso, o triângulo ABC é equilátero. Assim, teremos que os 4 triângulos AC_1T_1, AC_1T_2, BC_2T_3 e BC_2T_4 serão congruentes e o ângulo $C_1\hat{A}T_2 = 30°$.

Dessa forma, $tg(30°) = \frac{1}{\overline{AT_2}}$. Ou seja, $\overline{AT_2} = \sqrt{3}$ e portanto, também teremos que $\overline{BT_4} = \sqrt{3}$ (pois, $AC_1T_2 \equiv BC_2T_4$).

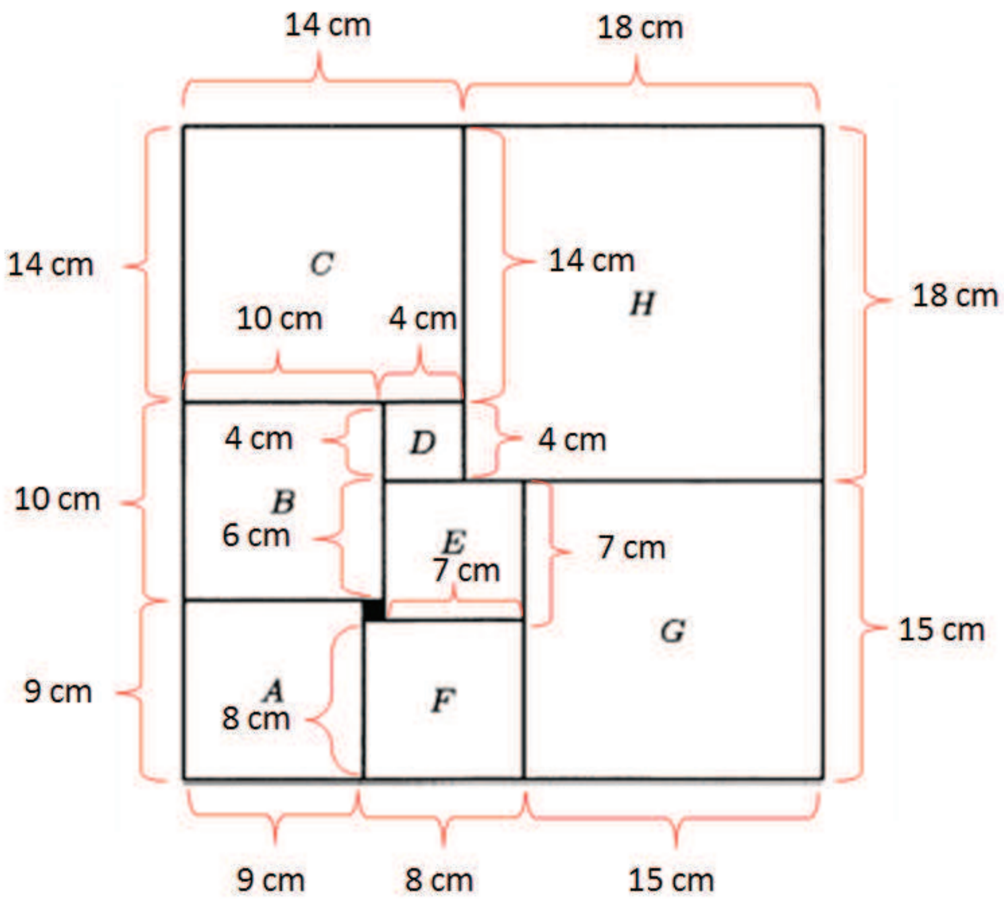
Assim, o lado do triângulo ABC será dado por $l = 4+\sqrt{3}+\sqrt{3} = 4+2\sqrt{3}$. E portanto, a área de ABC será:

$$A_t = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4+2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(16+16\sqrt{3}+12)\sqrt{3}}{4} = \frac{28\sqrt{3}+48}{4} = 7\sqrt{3}+12.$$

Questão 16

Resposta: **324**

A figura abaixo ilustra as medidas dos quadrados (A, B, C, D, E, F, G, H e o quadradinho preto). Deve-se iniciar lembrando que o lado do quadradinho preto é 1 cm e do quadrado A é 9 cm (área 81 cm²). Ao analisar as medidas concluímos que o quadrado H tem lado 18 cm, logo, sua área será: $A_H = 18^2 = 324$.



Questão 17

Resposta: **4**

Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 3\beta & \beta \end{pmatrix}$$

Vamos calcular a matriz produto AB e igualar a matriz identidade.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 3\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \alpha\beta + 3\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que:

$$\beta = 1$$

E que

$$\alpha\beta + 3\beta = 0$$

$$\beta(\alpha + 3) = 0$$

Como $\beta = 1$, então: $(\alpha + 3) = 0 \ \rightarrow \alpha = -3.$

Neste caso:

$$\beta - \alpha = 1 - (-3) = 1 + 3 = 4.$$

Questão 18

Letra: **D**

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$$

Vamos analisar cada uma das afirmações:

- Afirmação I: VERDADEIRA

$$3x + y = 7$$
$$3 \times 1 + 4 = 7$$
$$3 + 4 = 7$$
$$7 = 7$$

- Afirmação II: FALSA

$$5x - 2y = 8$$
$$5 \times (-2) - 2 \times 9 = 8$$
$$-10 - 18 = 8$$
$$-28 = 8$$

- Afirmação III: VERDADEIRA

  Resolvendo o sistema linear. Isolamos y na primeira equação:

$$y = 7 - 3x \text{ (I)}$$

  Substitui o y isolado (I) na segunda equação do sistema linear.

$$5x - 2y = 8$$
$$5x - 2(7 - 3x) = 8$$
$$5x - 14 + 6x = 8$$
$$5x + 6x = 8 + 14$$
$$11x = 22$$
$$x = \frac{22}{11}$$
$$x = 2 \text{ (II)}$$

Usa o x encontrado em (II) e volta o valor dele em (I).

$$y = 7 - 3x$$

$$y = 7 - 3 \times 2$$

$$y = 7 - 6$$

$$y = 1$$

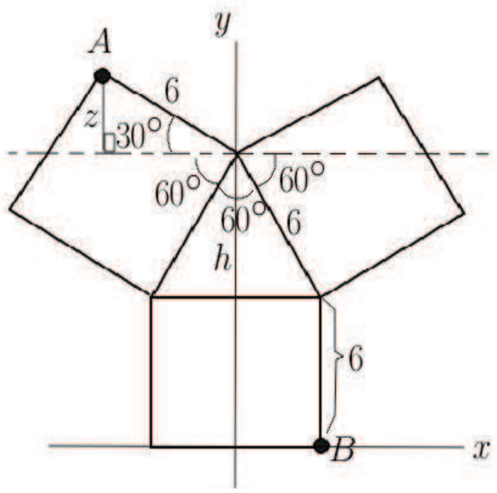
Logo $x + y = 2 + 1 = 3$.

Questão 19

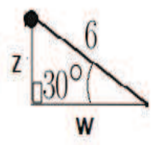
Resposta: 216.

Solução:

A figura abaixo, orientada no sistema de coordenadas xy, representa a situação do problema.



O ponto B tem coordenadas $(x, y) = (3, 0)$. Vamos determinar as coordenadas cartesianas do ponto A. Inicialmente, para determinar a coordenada x, vamos considerar o triângulo retângulo de referência, na parte superior da figura.



Aplicando uma trigonometria, temos que:

$$
\begin{aligned}
z &= 6\text{sen}(30°)\\
z &= 6\cdot\frac{1}{2}\\
z &= 3
\end{aligned}
$$

Temos também que:

$$
\begin{aligned}
w &= 6\cos(30°)\\
w &= 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
w &= 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Neste sentido, as coordenadas do ponto A são dadas por $(\bar{x},\bar{y})$, onde $\bar{x} = -w \Rightarrow \bar{x} = -3\sqrt{3}, 0$ e $\bar{y} = 6 + h + z$. Como $z = 3$ e $h = \dfrac{6\sqrt{3}}{2}$ (*altura do triângulo equilátero*), então

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= 6 + \frac{6\sqrt{3}}{2} + 3\\
\bar{y} &= 6 + 3\sqrt{3} + 3\\
\bar{y} &= 9 + 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Então,

$$A = (\bar{x},\bar{y}) = (-3\sqrt{3}, 9 + 3\sqrt{3})$$

Temos que:

$$
\begin{aligned}
d_{AB} &= \sqrt{(3-(-3\sqrt{3}))^2 + (0-(9+3\sqrt{3}))^2}\\
d_{AB}^2 &= (3+3\sqrt{3})^2 + (9+3\sqrt{3})^2\\
&= (3^2 + 2\cdot 3\cdot 3\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2) + (9^2 + 2\cdot 9\cdot 3\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2)\\
&= 9 + 18\sqrt{3} + 3^2 3 + 81 + 54\sqrt{3} + 3^2 3\\
&= \underbrace{144}_{m} + \underbrace{72}_{n}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Então

$$m + n = 144 + 72 = 216$$

Questão 20

Resposta: 270.

Solução:

Aplicando o algoritmo da divisão, temos que:

$$\begin{array}{r|l} 141 & n \\ \cline{2-2} 15 & q \end{array}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 144 &= n \cdot q + 15 \\ \Rightarrow \underbrace{144 - 15} &= n \cdot q \\ 126 &= n \cdot q \end{aligned}$$

Neste sentido, temos que n é divisor de 126. Inicialmente, vamos encontrar todos os divisores de 126:

Fatorando 126 como produtos de primos, temos que:

$$126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

Vamos determinar todas as combinações possíveis das potências dos primos para gerar os divisores n:

$$\begin{aligned}
2^0 \cdot 3^0 \cdot 7^0 &= 1\\
2^0 \cdot 3^0 \cdot 7^1 &= 7\\
2^0 \cdot 3^1 \cdot 7^0 &= 3\\
2^0 \cdot 3^1 \cdot 7^1 &= 21\\
2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^0 &= 9\\
2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^1 &= 63\\
2^1 \cdot 3^0 \cdot 7^0 &= 2\\
2^1 \cdot 3^0 \cdot 7^1 &= 14\\
2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^0 &= 6\\
2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 &= 42\\
2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^0 &= 18\\
2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1 &= 126
\end{aligned}$$

Lembremos que na divisão de 141 por n, com resto 15, devemos ter o divisor n sempre maior que 15. Neste sentido, os inteiros n que cumprem com esta propriedade são:

$$18,\ 21,\ 42,\ ,63\,,126$$

Então,

A soma dos divisores é igual a:

$$18 + 21 + 42 + 63 + 126 = 270$$

Questão 21

Resposta: 1284010.

Solução:

A partir da fórmula consolidada para se calcular combinações, $C(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ e empregando o princípio da *inclusão e exclusão*, temos que:

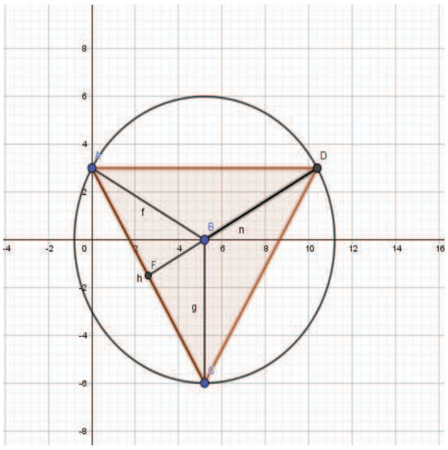
$$\begin{aligned} \text{Todos os comitês} \quad &- \quad [\text{nenhum ou } 1 \text{ repres. da manufatura}] \\ C(35,6) \quad &- \quad [C(21,6) + C(14,1) \cdot C(21,5)] = 1284010 \end{aligned}$$

Questão 22

Resposta: 234.

Solução:

A figura abaixo representa a situação do problema:



O raio da circunferência corresponde à distância do vértice A ao ponto B. Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{AB} &= \sqrt{(3\sqrt{3}-0)^2+(0-3)^2} \\ \mathrm{d}_{AB} &= 6 \end{aligned}$$

Como o baricentro subdivide a altura do triângulo equilátero na razão $2:1$, temos que $h = \underbrace{6}_{raio} + 3 \Rightarrow h = 9$. Sabemos que no triângulo equilátero cumpre-se a fórmula:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Então,

$$9 = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l = \frac{2\cdot 9}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = 6\sqrt{3}$$

Neste sentido, temos que

$$\begin{aligned}
\underbrace{d_{AC}} &= \sqrt{(3\sqrt{3}-0)^2+(y-3)^2}\\
6\sqrt{3} &= \sqrt{(3\sqrt{3}-0)^2+(y-3)^2}\\
(6\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{(3\sqrt{3}-0)^2+(y-3)^2})^2\\
36\cdot 3 &= (3\sqrt{3})^2+(y-3)^2\\
108 &= 27+y^2-2y\cdot 3+3^2
\end{aligned}$$

Temos que $y = -6$ é a solução da equação acima pertinente ao problema. Neste sentido $C = (3\sqrt{3}, -6)$. Como o ponto D está na mesma reta passando por A, paralela ao eixo x, isto implica que a coordenada y de D é dada por 3. Então, se $D = (a, b) \Rightarrow b = 3$. Para determinar a coordenada x de D vamos usar o fato que $d_{AD} = 6\sqrt{3}$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\underbrace{d_{AD}} &= 6\sqrt{3}\\
\sqrt{(a-0)^2+(b-3)^2} &= 6\sqrt{3}\\
\sqrt{(a-0)^2+(3-3)^2} &= 6\sqrt{3}\\
(\sqrt{a})^2 &= 6\sqrt{3}\\
\Rightarrow a &= 6\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Então $D = (a, b) = (6\sqrt{3}, 3)$
Então,

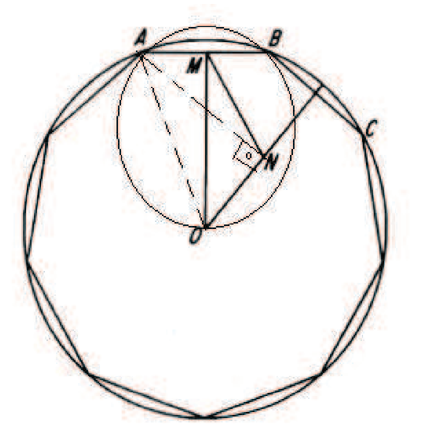
$$a^2+b^2+r^2+h^2 = (6\sqrt{3})^2+3^3+6^2+9^2 = 234$$

Questão 23

Resposta: 30.

Solução:

A figura abaixo representa a situação do problema:



$$\begin{aligned} \text{arco AB} &= 40^\circ \\ \text{arco AD} &= 60^\circ \end{aligned}$$

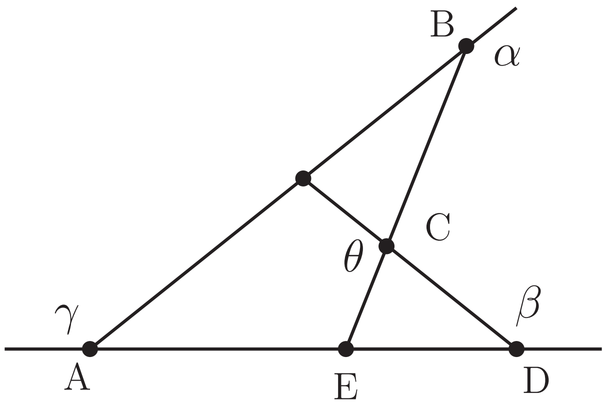
Isto implica que o triângulo ΔAOD é equilátero e $AN \perp OD$. Ou seja, existe uma circunferência passando pelos pontos A, M, N e O de diâmetro AO.

OMN determina o mesmo arco que $OAN = 30°$. Isto implica que $OMN =$ 30 graus.

Questão 24

Resposta: 540°

Solução:



Como o ângulo $A\hat{B}E$ é o suplementar de α, teremos que $A\hat{B}E = 180° - \alpha$.

Por motivos análogos, $E\hat{C}D = 180° - \theta$ e $C\hat{D}E = 180° - \beta$.

O ângulo $A\hat{E}B$ é um ângulo externo ao triângulo CDE, logo $A\hat{E}B = E\hat{C}D + C\hat{D}E = 360° - \theta - \beta$.

Por outro lado, o ângulo γ é um ângulo externo ao triângulo ABE, logo

$$\gamma = A\hat{B}E + A\hat{E}B = 180° - \alpha + 360° - \theta - \beta.$$

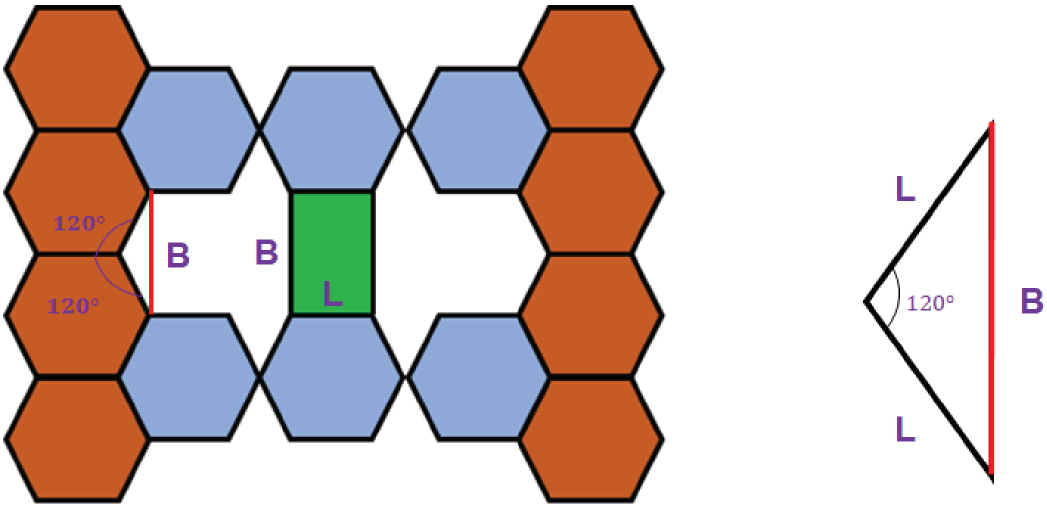
Assim,

$$\alpha + \beta + \gamma + \theta = 540°.$$

Questão 25

Letra: **D**

Vejamos a figura, onde foi inserida algumas marcações para referência.



Note que a área da pedra de esmeralda (verde) é a área de um retângulo de lados L e B, sendo L o lado do hexágono regular.

Pelo enunciado, $L = 3\ cm$.

Como o hexágono é regular, o ângulo interno de um hexágono é $120°$. Lembrando que o ângulo interno de um polígono regular é dado por:

$$\alpha = \frac{(n-2) \times 180°}{n}$$

No caso do hexágono:

$$\alpha = \frac{(6-2) \times 180°}{6} = \frac{4 \times 180°}{6} = 120°$$

Para encontrar o lado B da pedra de esmeralda, vamos usar o triângulo exemplificado acima e a lei dos cossenos.

$$B^2 = L^2 + L^2 - 2 \times L \times L \times \cos(120°)$$

$$B^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times (-0{,}5)$$

$$B^2 = 9 + 9 + 9$$

$$B^2 = 27$$

$$B = \pm\sqrt{27}$$

$$B = \pm 3\sqrt{3}$$

Desprezamos o valor negativo pois trata-se de medidas de comprimento (sempre positivas). Então temos que $B = 3\sqrt{3}\ cm$.

Logo, a área da pedra de esmeralda será

$$A = LB$$

$$A = 3 \times 3\sqrt{3}$$

$$A = 9\sqrt{3}\ cm^2$$