

EXPLORANDO CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO A PARTIR DE MODELOS MATEMÁTICOS

Gabriella Helena Jorge Silva

Faculdade de Matemática
CEATEC
gabriellahjs@gmail.com

Prof^(a) Dr^(a) Maria Beatriz Ferreira Leite

Grupo de Pesquisa: Modelagem Matemática
CEATEC
bialeite@puc-campinas.edu.br

Resumo: *A construção de modelos matemáticos relacionados a situações cotidianas é uma importante ferramenta quando se pretende que o aluno adquira uma visão prática e utilitária da matemática, buscando a contextualização do processo de ensino e aprendizagem. Além disso, a utilização de novas tecnologias educacionais vem sendo cada vez mais difundida e necessária para tornar este processo mais significativo e atraente. Buscando explorar conteúdos matemáticos dos ensinamentos Fundamental e Médio, neste trabalho são apresentados modelos matemáticos que abordam diversos temas, contextualizando os conteúdos através da exploração e resolução de problemas reais. Alguns modelos foram obtidos e adaptados de trabalhos de Modelagem Matemática para serem utilizados no jogo Mathdoku (versão proposta para o Sudoku), explorando principalmente conteúdos do ensino Fundamental. Para contextualizar alguns conteúdos matemáticos do Ensino Médio, o tema escolhido foi Dinâmica Populacional. Os modelos propostos descrevem o crescimento da população do Estado de São Paulo a partir da utilização de diferentes funções. Taxas de crescimento distintas são utilizadas e uma comparação quantitativa e qualitativa é feita para validar os modelos obtidos.*

Palavras-chave: *modelos matemáticos, dinâmica populacional, ensino e aprendizagem.*

Área do Conhecimento: *Ciências Exatas e da Terra – Matemática.*

1. INTRODUÇÃO

A construção de modelos matemáticos relacionados a situações cotidianas é uma importante ferramenta quando se pretende que o aluno adquira uma visão prática e utilitária da matemática, buscando um processo de ensino-aprendizagem mais significativo e contextualizado. A falta de um material didático de apoio muitas vezes desencoraja e desestimula o professor a utilizar a Modelagem Matemática na sala de aula como estratégia de ensino. Buscou-se neste trabalho disponibilizar exemplos que possam servir

como material de apoio para a utilização da Modelagem Matemática em sala de aula.

Numa primeira fase, estudou-se o processo de Modelagem Matemática a partir da leitura de textos que abordam esta metodologia no processo de ensino e aprendizagem [1,2,5,6].

A seguir, foram analisados trabalhos realizados na disciplina de Modelagem Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da PUC-Campinas, oferecida no 6º semestre. Maiores detalhes sobre o desenvolvimento destes trabalhos estão descritos em [7]. Esta análise resultou na organização e sistematização dos modelos elaborados. Dentre estes, alguns modelos foram escolhidos para serem utilizados no *Mathdoku* (uma versão do jogo Sudoku). Este aplicativo originou-se em trabalhos de graduação e foi implementado em outro trabalho de Iniciação Científica¹.

De acordo com Biembengut [2], “Como é essencialmente um método de pesquisa, no Ensino, a modelagem matemática pode tornar-se caminho para despertar no aluno interesse por assuntos de matemática e, também, de alguma área da ciência que ainda desconheça, ao mesmo tempo em que ele aprende a arte de modelar, matematicamente”. Com esse propósito, isto é, para que todo o processo de Modelagem Matemática fosse também vivenciado (desde a escolha do tema até a validação dos modelos obtidos), escolheu-se trabalhar com o tema Dinâmica Populacional, favorecendo assim, não apenas a prática da investigação, como também o exercício da contextualização dos conteúdos matemáticos.

¹ Uma descrição mais detalhada da implementação deste aplicativo pode ser vista no resumo expandido da aluna Lívia F. Sousa que desenvolveu o plano de trabalho “Ferramentas Computacionais Aplicadas à Modelagem Matemática no Ensino e na Pesquisa”.

2. ORGANIZAÇÃO DOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS CONTEMPLADOS NOS TRABALHOS DE MODELAGEM

A partir da leitura e organização dos trabalhos realizados na disciplina de Modelagem Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática foi possível evidenciar que conteúdos são escolhidos e com qual frequência. Na Tabela 1 apresentamos alguns exemplos de conteúdos, de acordo com o nível de ensino e o tema no qual foi abordado.

Tabela 1: sistematização dos conteúdos abordados

Temas	Conteúdo	Série
Água, Combustíveis, Diabetes, Aquecimento Global, Futebol, Triathlon e Música .	Sistemas de Medidas e frações	5ª Funda-mental
Água, Alimentos orgânicos e convencionais, Anorexia, Odontologia, Terceira Idade	Função de 1º grau	6ª Funda-mental
Bebidas, Odontologia, Água, Alimentação	Função de 2º grau	8ª Funda-mental
Música, Água, Abelhas	Função Expo-nencial e Loga-rítmica	1º Médio
Combustíveis, Anorexia, Futebol, Água, Triathlon	Sistemas Line-ares e Matrizes	2º Médio
Bebidas, Música, Futebol, Odonto-logia	Cálculo I	Superior

Dentre os modelos estudados, alguns foram selecionados para serem utilizados como questões matemáticas do *Mathdoku*. A idéia do deste aplicativo surgiu num trabalho feito por alunos da graduação do Curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Informática Educativa A, onde o objetivo era propor um aplicativo educacional (sem implementá-lo) que abordasse conteúdos matemáticos.

A Figura 1 mostra a tela que é exibida no jogo quando uma célula é ativada. No banco de dados foram inseridas cerca de 60 questões. Alguns exemplos das questões propostas a partir dos modelos são:

- O índice de Massa Corporal (IMC) é reconhecido como padrão para avaliar a proporção saudável entre peso e altura. O IMC é calculado dividindo o peso (em quilos) pela altura ao quadrado (em metros).

Encontre a altura de uma pessoa que pese 80 kg e tenha IMC igual a 20. (Resp.: 2).

- Ao escovar os dentes com a torneira aberta por 5 minutos uma pessoa gasta cerca de 10 litros de água. Se esta pessoa deixar a torneira aberta apenas por 2 minutos, quantos litros de água ela ira gastar? (Resp.: 4).

- Um banho de 15 minutos com o registro aberto consome 144 litros de água. Se o registro for fechado e o banho reduzido para 5 minutos, para quanto vai o consumo? (OBS: some os algarismos do resultado e divida por 2) (Resp.: 6).

- Das 3:00hs as 8:00hs a temperatura de uma cidade variou, linearmente, de 12°C a -3°C . Em que horário deste período a temperatura atingiu 0°C? (Resp: 7)

- Uma população de insetos triplica a cada dia. Se a população inicial era de 9 insetos, qual será ela população após 6 dias? (OBS: some os algarismos do resultado e divida por 2) (Resp: 9)

- O número de zangões numa colméia na geração n segue uma seqüência de Fibonacci, dada por:

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} .$$

Se na 1ª e na 2ª gerações, o número de zangões era, respectivamente, 1 e 2, calcule quantos zangões terá na 5ª geração. (Resp: 8)

- Sabendo-se que o ser humano é capaz de ouvir de 20 a 20000hz, calcular quantos intervalos n de oitavas musicais ele pode ouvir utilizando uma PG de

razão $2^{\frac{1}{12}}$ (frequência das notas). Lembrado que a formula geral da PG é dada por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. (OBS: a resposta é dada pela soma dos algarismos do resultado) (Resp: 3).

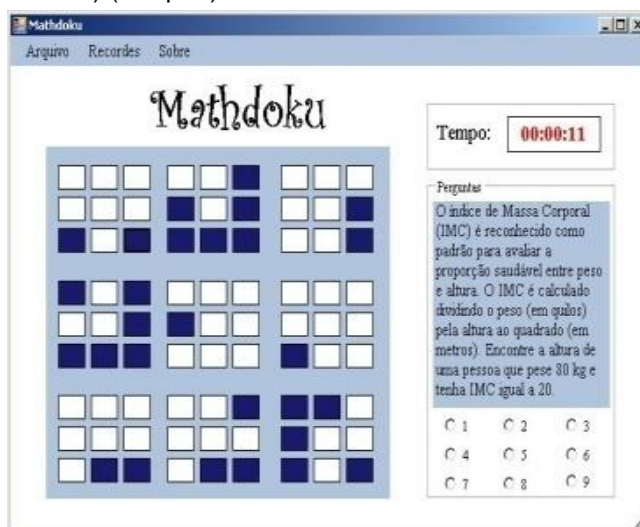


Figura 1: Tela exibida no jogo Mathdoku quando os problemas são propostos.

3. DINÂMICA POPULACIONAL

Modelos matemáticos que descrevem o crescimento e decréscimo de populações na natureza são bastante úteis não apenas para prever a evolução da população como também para possibilitar a análise de fatores que contribuem na sua dinâmica. Buscando aplicar a Modelagem Matemática e trabalhar com conteúdos matemáticos compatíveis com o currículo do Ensino Médio, o tema abordado foi Dinâmica Populacional, e escolheu-se modelar o crescimento da população do estado de São Paulo.

O crescimento desta população foi modelado por três tipos de funções: linear, exponencial e logística. As taxas de crescimento foram calculadas levando-se em consideração as características particulares e hipóteses básicas de cada tipo de modelo e então os gráficos e simulações feitos através dos softwares Winplot e Excel.

Os dados utilizados foram coletados no site da Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados - SEADE. Para facilitar as contas o ano de 1994 foi identificado como instante inicial ($t=0$) e dessa forma o ano de 2003 corresponde a $t=9$. Os valores da população do Estado de São Paulo neste período estão na Tabela 2.

Tabela 2. População do Estado de São Paulo.

Ano	Tempo	Número de habitantes
1994	0	33.162.862
1995	1	33.486.396
1996	2	34.074.644
1997	3	34.581.838
1998	4	35.124.979
1999	5	36.276.632
2000	6	36.909.200
2001	7	37.542.521
2002	8	38.123.695
2003	9	38.718.301

fonte: www.seade.gov.br

3.1. O Modelo Linear

No modelo linear supõe-se que a variação do número total de indivíduos é constante. Além disso, supõe-se que não há restrições nem tampouco limitações para que o crescimento (ou decréscimo), e dessa forma, a população cresce (ou decresce) ilimitadamente.

A expressão geral que representa o número de indivíduos N em função do tempo t admitindo-se crescimento linear é dada por $N = r t + N_0$, onde r é a taxa de crescimento, t é o tempo e N_0 é a população inicial.

Usando os dados apresentados na Tabela 1, consideramos $N(0) = 33162862$, que corresponde à população total do Estado de São Paulo no ano de 1993.

A estimativa da taxa de crescimento $r = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ foi feita a partir da média da variação anual do número de indivíduos ($\Delta t = 1$),

O valor médio obtido foi de $r = \frac{5.555.439}{9} = 617.271$

A Figura 2 mostra o gráfico da função de primeiro grau que representa o Modelo Linear e os pontos originais apresentados na Tabela 1.

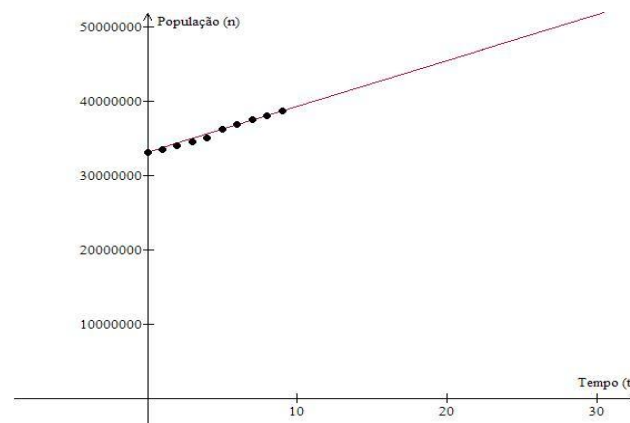


Figura 2: Modelo Linear $N = 617.271t + 33.162.862$ para a população do Estado de São Paulo.

3.2. O Modelo Exponencial

O modelo exponencial baseia-se na hipótese básica de que a população cresce sem qualquer restrição, não admitindo fatores que regulam seu crescimento tais como, epidemias, guerras, fome, entre outros. Admitindo-se que a taxa de crescimento é contínua, o modelo exponencial é descrito pela função $N = N_0 e^{rt}$, onde N_0 é a população inicial, r é a taxa de crescimento e t é o tempo.

Dois procedimentos distintos foram adotados para a obtenção da taxa de crescimento r : uma média das taxas relativas anuais e a taxa relativa total do período, conforme os casos 2.2.1 e 2.2.2 descritos a seguir.

3.2.1. Média das taxas

A estimativa da taxa de crescimento neste caso foi feita considerando-se o crescimento relativo em cada

ano, isto é, comparando-se o acréscimo do número de indivíduos em relação à população anterior.

Neste caso foram calculadas os acréscimos relativos

anuais $\frac{\Delta N}{N} = \frac{N_t - N_{t-1}}{N_{t-1}}$ e a taxa foi obtida considerando-se a média dos acréscimos relativos no período, conforme valores mostrados na Tabela 3.

Tabela 3: acréscimos relativos anuais do número de indivíduos no Estado de São Paulo

Tempo	População Total	Crescimento relativo
0	33.162.862	
1	33.486.396	0,0098
2	34.074.644	0,0176
3	34.581.838	0,0149
4	35.124.979	0,0157
5	36.276.632	0,0328
6	36.909.200	0,0174
7	37.542.521	0,0172
8	38.123.695	0,0155
9	38.718.301	0,0156
TOTA		0,1564

Assim, obtemos $r = \frac{0,1564}{9} = 0,0174$.

3.2.2. Taxa total

Neste caso foi obtido o acréscimo relativo total do período,

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{N_{final} - N_{inicial}}{N_{inicial}} = \frac{38.718.301 - 33.162.862}{33.162.862} = 0,1675$$

e a taxa de crescimento resultante foi de

$$r = \frac{0,1675}{9} \Rightarrow r = 0,0186$$

A Figura 3 mostra o gráfico da função exponencial com os valores obtidos para a taxa de crescimento nos casos acima.

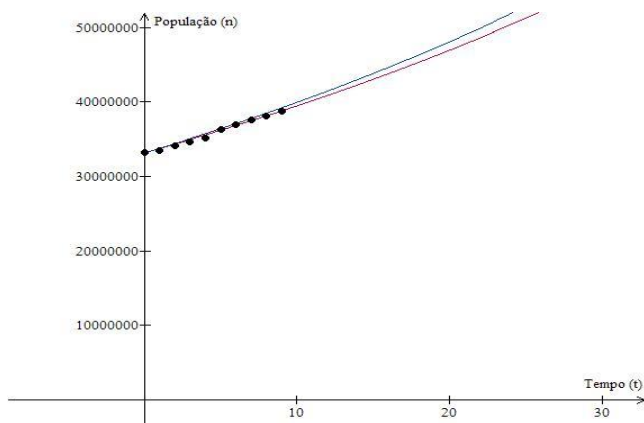


Figura 3: Modelos Exponenciais para os casos (3.2.1) e (3.2.2) descritos acima.

3.3. O Modelo Logístico

No modelo logístico supõe-se que a população sofre inibições naturais no seu crescimento. À medida que a população cresce a competição entre os indivíduos faz com que a taxa de crescimento diminua, embora o número de indivíduos continue crescendo. Neste modelo, admite-se que há um nível populacional máximo, que descreve a capacidade suporte do meio. Uma vez atingido este nível, a população seria estável. A função que descreve este modelo é dada por

$$N = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot e^{-rt}}$$

onde N é o número de indivíduos no instante t , K representa o valor limite da população, N_0 é a população inicial, r é a taxa de crescimento e t é o tempo.

Para estimar qual seria esse valor limite para a população do Estado de São Paulo, utilizou-se o método de Ford-Walford [1]. Para que este método forneça uma boa estimativa do valor de K , é necessário que sejam conhecidos níveis populacionais do período no qual a taxa de crescimento já começou a diminuir. Observando a Tabela 3, verifica-se que isto ocorre a partir de 1999 ($t=5$).

Basicamente este método supõe que uma vez em equilíbrio, a população não varia mais, isto é

$$N_{t+1} = N_t$$

Assim, a estimativa deste valor limite pode ser obtida relacionando os valores das populações nos instantes t e $t+1$. A partir dos pontos obtidos, ajusta-se uma reta que descreve como as populações consecutivas estão relacionadas

$$N_{t+1} = f(N_t) = aN_t + b$$

conforme mostrado na Figura 4.

Assim, nas estimativas dos valores de k e r para este modelo, consideramos os valores populacionais de 1999 a 2003 (ver Tabela 4).

Tabela 4: Valores utilizados no método de Ford-Walford

t	N_t	N_{t+1}
5	36.276.632	36.909.200
6	36.909.200	37.542.521
7	37.542.521	38.123.695
8	38.123.695	38.718.301

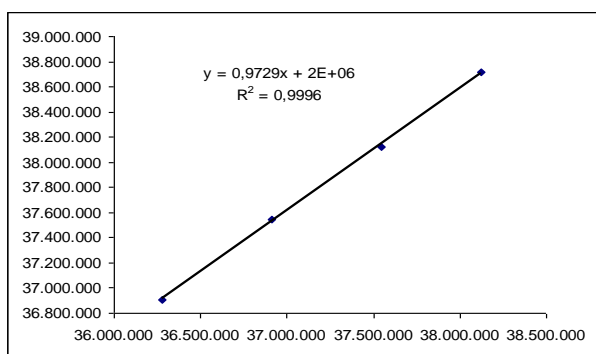


Figura 4: Reta ajustada para $N_{t+1} = f(N_t)$

Fazendo a intersecção desta reta com a bissetriz, obtemos o valor limite da população $K = 2000000 / (1 - 0,9729) = 73800738$.

A estimativa da taxa de crescimento r foi feita com base nos valores do SEADE e na expressão do próprio modelo. Isolando-se o valor de r no modelo, obtemos

$$r = -\frac{1}{t} \ln \left[\frac{N_0 \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right)}{K - N_0} \right]$$

A Tabela 5 apresenta os valores obtidos para r a cada ano, a partir de 1999.

Tabela 5: estimativa da taxa de crescimento r para o modelo logístico

t	N_t	r
5	36.276.632	0,033892027
6	36.909.200	0,03395809
7	37.542.521	0,034011151
8	38.123.695	0,03369981
9	38.718.301	0,033542406

O valor médio obtido para o período considerado foi de 0,033821. Nos cálculos e simulações o valor utilizado foi de 0,0338.

A Figura 5 mostra o gráfico da função obtida no Modelo Logístico e os pontos originais apresentados na Tabela 1.

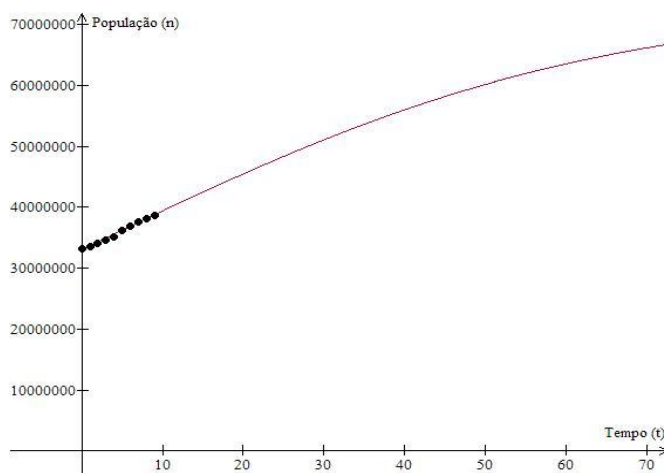


Figura 5: Modelo Logístico

$$N = \frac{(73.800.738)(33.162.862)}{33.162.862 + 40.637.876 e^{-0,0338t}} \text{ para a população do Estado de São Paulo.}$$

3.4. Comparação entre os modelos

Uma comparação entre os três modelos propostos foi feita a partir do cálculo da diferença entre os valores originais e os valores estimados. Os resultados estão na Tabela 6.

Tabela 6: Diferença entre os valores obtidos pelos modelos e o valores apresentados pelo SEADE

t	$ N_{OBS} - N_{LIN} $	$ N_{OBS} - N_{EXP} $	$ N_{OBS} - N_{LOG} $
0	0	0	0
1	293.737	258.549	294.684
2	322.760	262.601	326.423
3	432.837	358.104	440.636
4	506.967	428.238	519.972
5	27.415	99.376	8.487
6	42.712	96.951	17.501
7	58.762	84.134	27.262
8	22.665	7.829	14.772
9	0	66.585	42.668
Σ	1.707.855	1.662.367	1.692.405

Para os valores no período de 1994 a 2003 o modelo que mais se aproxima é o exponencial (a soma das diferenças é a menor). Entretanto, sabe-se que o crescimento ilimitado não é razoável a longo prazo, o que faria com que fossem descartados tanto o modelo linear quanto o exponencial para projeções populacionais futuras. Além disso, observa-se que o erro do modelo logístico proposto se aproxima do erro do modelo exponencial e contempla a questão da população limite.

Outra forma de validar os modelos propostos é comparar o valor obtido através das funções com valores reais. Por exemplo, para o ano de 2007 ($t=13$), o valor fornecido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE [3] foi de 39.827.570. Na Tabela 7 as diferenças das estimativas de cada modelo são apresentadas.

Tabela 7: Estimativas e o erro cometido para a população do Estado de São Paulo em 2007 através dos modelos propostos.

	N(13)	 N_{IBGE} – N(t)
Linear	41.187.385	1.359.815
Exponencial	41.580.472	1.752.905
Logarítmico	41.236.885	1.409.315

Para este valor do tempo t o erro cometido através do modelo linear novamente é o menor e está próximo do modelo logístico, que contempla a hipótese da população ter uma capacidade limite. Para projeções a curto prazo os modelos linear e exponencial são adequados, mas pelo fato de admitirem um crescimento ilimitado, espera-se que, a medida que o tempo passe, a estimativa através do modelo logístico seja mais razoável e erro cometido menor.

4. COMENTÁRIOS FINAIS

Esta experiência proporcionou, além do aprofundamento dos conhecimentos específicos, a vivência do trabalho interdisciplinar e em conjunto.

A sistematização e organização dos trabalhos de Modelagem Matemática permitiu uma análise com relação aos conteúdos que são escolhidos com bastante frequência pelos alunos e aqueles que não são ou são raramente contemplados. A identificação da relação entre os problemas levantados e os conteúdos efetivamente trabalhados foi essencial para um primeiro contato com o processo de Modelagem Matemática.

Na elaboração dos modelos de crescimento populacional aqui apresentados, todo o processo de modelagem foi vivenciado, desde a coleta de dados até a validação dos modelos obtidos. Particularmente para

o modelo logístico, vale enfatizar a importância das simulações realizadas no Winplot, que possibilitaram inferir sobre o valor adequado da taxa para este modelo.

AGRADECIMENTOS

As autoras agradecem aos alunos Amanda R. Savóia, Ariele C. Hank e Wilker C. dos Santos do Curso de Licenciatura em Matemática pela disponibilização do protótipo do *Mathdoku* para sua implementação computacional e divulgação neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] Bassnaezi, R. C., (2002), *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. Contexto, São Paulo.
- [2] Biembengut, M. S. , (2003), *Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática*. 2. ed. Edifurb, Blumenau.
- [3] BRASIL, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística- IBGE, capturado online em 26/06/2009 de <<http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/contagem2007>>
- [4] Bueno, P. P.; Simão, G.M.; Camargo, A.; Fantinati, L.; Vieira, A. M.; Leite, M. B. F. (2007), A matemática da música. In: V CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CNMEM). Ouro Preto.
- [5] Corrêa, S.D.; Moura, N. A.; Silva, M. E.; Elias, L. G.; Leite, M. B. F. (2007), O ensino de funções por partes através de modelos matemáticos aplicados à odontologia legal. In: V CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CNMEM). Ouro Preto.
- [6] Leite, M. B. F.; Ferreira, D. H. L.; Scrich, C. R., (2007), O ensino da Matemática através da Educação Ambiental. In: XII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (CIAEM). México.
- [7] Leite, M. B. F., (2008), Reflexões sobre a disciplina de Modelagem Matemática na Formação de Professores. *Educação Matemática Pesquisa*, v.10, nº1, p.115-135.